1B Diskreetit satunnaismuuttujat

Tässä harjoituksessa tarvitaan *satunnaismuuttujan* ja *jakauman* käsitteitä, jotka kannattaa selvittää luentomateriaaleista. Lisäksi tarvitaan kombinatoriikasta tulo- ja summaperiaatetta sekä binomikertoimia (luentokalvot 1A ja luentomonisteen luku 1.8).

Merkinnöistä: Leikkaustapahtuman todennäköisyyttä $\mathrm{P}(A \cap B)$ saatetaan merkitä myös paremmin luonnollista kieltä vastaavasti $\mathrm{P}(A \text{ ja } B)$ tai lyhyesti $\mathrm{P}(A, B)$.

Tuntitehtävät

1B1 (Susipari lintutarhassa) Lintutarhassa asuu neljä ankkaa, neljä hanhea ja kaksi kanaa. Yön pimeydessä lintutarhaan saapuu kaksi sutta, joista kumpikin pyydystää yhden satunnaisesti valitsemansa linnun. Merkitään

$$\begin{aligned} X &= \text{pyydystettyjen ankkojen lukumäärä}, \\ Y &= \text{pyydystettyjen hanhien lukumäärä}. \end{aligned}$$

(a) Määritä satunnaismuuttujan X jakauma listaamalla taulukkoon X:n mahdolliset arvot ja niiden todennäköisyydet.

(b) Määritä satunnaismuuttujan Y jakauma.

(c) Määritä satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma listaamalla parin (X, Y) mahdollisten arvojen todennäköisyydet 3×3 -taulukkoon.

(d) Laske c-kohdan taulukon rivi- ja sarakesummat ja vertaa niitä a- ja b-kohtien taulukoihin.

(e) Laske c-kohdan taulukon avulla todennäköisyys, että susipari pyydystää yhtä monta ankkaa ja hanhea.

(f) Selvitä c-kohdan taulukon avulla, ovatko satunnaismuuttujat X ja Y stokastisesti riippuvat vai riippumattomat?

Jos diskreetin satunnaismuuttujan käsite ei ole vielä hyvin tuttu, voi tehtävän ratkaista myös ajattelemalla yksinkertaisesti keskenään poissulkevia *tapahtumia* $X_1, X_2, \ldots$, missä tapahtuma X_i tarkoittaa "pyydystettiin i ankkaa". Tapahtuma X_i vastaa satunnaismuuttujan X "pyydystettyjen ankkojen määrä" arvoa $X = i$.

1B2 (Tuntematon noppa.) Laatikossa on neljä noppaa, yksi 4-sivuinen, yksi 6-sivuinen ja kaksi 8-sivuista. Kaikki nopat on numeroitu normaaliin tapaan ykkösestä eteenpäin. Ystäväsi valisee laatikosta salaa yhden nopan umpimähkään ja heittää sitä kerran näyttämättä noppaa sinulle. Merkitään

$$\begin{aligned} S &= \text{valitun nopan sivujen lukumäärä}, \\ T &= \text{nopanheiton tulos}. \end{aligned}$$

(a) Määritä satunnaismuuttujan S jakauma listaamalla taulukkoon S:n mahdolliset arvot ja niiden todennäköisyydet.

(b) Määritä satunnaismuuttujien S ja T yhteisjakauma listaamalla 3×8 -taulukkoon parin (S, T) mahdollisten arvojen todennäköisyydet.

(c) Määritä (b)-kohdassa lasketun yhteisjakauman avulla satunnaismuuttujan T jakauma.

(d) Ystäväsi paljastaa, että nopanheiton tulos on 3. Selvitä satunnaismuuttujan S ehdollinen jakauma tämän tiedon valossa. Toisin sanoen, kullekin S:n mahdolliselle arvolle i, laske ehdollinen todennäköisyys $\mathrm{P}(S = i \,|\, T = 3)$.

Kotitehtävät

1B3 (Lasten tekeminen) Pariskunta päättää hankkia lapsia kunnes ainakin yksi seuraavista ehdoista täyttyy:

- Heillä on kaksi tyttölasta.
- Heillä on yhteensä neljä lasta.

Perheeseen syntyy lapsia yksi kerrallaan niin, että jokainen lapsi on yhtä suurella todennäköisyydellä tyttö tai poika, aiemmista synnytyksistä riippumattomasti. Oletetaan, että perhe on jo lopettanut lasten hankinnan (jompikumpi tai molemmat ylläolevista ehdoista on siis täyttynyt) ja merkitään $L = T + P$, missä

$$\begin{aligned} T &= \text{tyttölasten lukumäärä perheessä,} \\ P &= \text{poikalasten lukumäärä perheessä.} \end{aligned}$$

(a) Määritä satunnaismuuttujan L jakauma.
Vihje. Tutki mahdollisia lapsijonoja syntymäjärjestyksessä, esimerkiksi PPT (ensin kaksi poikaa ja sitten tyttö). Tutki, miten mahdolliset jonot syntyvät alkaen ensimmäisestä lapsesta ja haarautuen aina vaihtoehtojen mukaan. Kullekin mahdolliselle jonolle laske todennäköisyys, ja lopeta jonon kasvattaminen kun jompikumpi lopetusehto täyttyy.

(b) Määritä satunnaismuuttujien T ja P yhteisjakauma.

(c) Millä todennäköisyydellä perheessä on enemmän tyttölapsia kuin poikalapsia?

(d) Määritä satunnaismuuttujien L ja T yhteisjakauma.

1B4 (Noppajonon maksimi) Tavallista kuusisivuista noppaa heitetään neljä kertaa. Olkoot heittotulokset X_1, X_2, X_3, X_4 ja koko jonon maksimi eli suurin tulos M. Jos esim. heittotulokset ovat $1, 4, 2, 3$, niin $M = 4$.

(a) Mikä on tapahtuman $\{M \le 3\}$ todennäköisyys, toisin sanoen kertymäfunktion arvo $F_M(3)$?
Vihje. Olisi toki mahdollista luetella kaikki $6^4 = 1296$ mahdollista tulosjonoa ja laskea yksitellen, monessako niistä $M \le 3$. Tämä olisi hyvin työlästä. Laske mieluummin seuraavasti. Millaisia on jokaisen heittotuloksen X_i oltava, jotta $M \le 3$? Mikä on todennäköisyys sille, että kukin heittotulos erikseen toteuttaa tämän ehdon? Laskutoimituksen pitäisi nyt olla helppo.

(b) Mitkä ovat tapahtumien $\{M \le k\}$ todennäköisyydet, kun $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$?

(c) Päättele edellisen kohdan ja todennäköisyyden erotussäännön avulla tapahtumien $\{M = k\}$ todennäköisyydet eli tiheysfunktion arvot $f_M(k)$, kun $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Esitä nyt M:n jakauma taulukkona.

(d) Osoita, että M ja X_1 eivät ole riippumattomat, näyttämällä että luentomonisteen yhtälö (2.17) ei toteudu. Vihje: Tarkastele esimerkiksi tapahtumia $\{M = 1\}$ ja $\{X_1 = 2\}$.