2A Jatkuvat satunnaismuuttujat

Tuntitehtävät

2A1 (Palkkajakauman malli.) Satunnaisesti valitun palkansaajan kuukausiansiota (eur) mallinnetaan satunnaismuuttujalla X, jolla on tiheysfunktio

$$f(x) = \begin{cases} \alpha c^{\alpha} x^{-\alpha-1}, & x > c, \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

missä $\alpha = 1.6$ ja $c = 1500$.

(a) Laske X:n kertymäfunktio ja piirrä siitä kuva.

(b) Määritä X:n arvojoukko, eli miten pieniä ja miten suuria arvoja X voi saada?

(c) Laske todennäköisyys, että satunnaisesti valittu palkansaaja ansaitsee yli 15 000 eur/kk.

(d) Määritä sellainen ansiotaso z, että tasan 90% palkansaajista ansaitsee alle z euroa kuukaudessa.

2A2 (Molemmat myöhässä.) Tässä tehtävässä tutkimme yksinkertaista kahden muuttujan *jatkuvaa yhteisjakaumaa*. Monen muuttujan integraalilaskennasta tarvitsemme vain seuraavan yksinkertaisen huomion: Jos kahden muuttujan funktion arvo on jossain alueessa vakio, niin funktion integraali kyseisessä alueessa on alueen pinta-ala kertaa kyseinen vakio.

Ulla saapuu U minuuttia ja Venla V minuuttia myöhässä sopimastaan lounastapaamisesta, jonka piti alkaa klo 12:00. Kumpikin myöhästymisaika noudattaa jatkuvan välin $[0, 60]$ tasajakaumaa ja ne ovat toisistaan riippumattomat.

(a) Selvitä U:n jakauman tiheysfunktio f_U, V:n jakauman tiheysfunktio f_V sekä U:n ja V:n yhteisjakauman tiheysfunktio $f_{U,V}$.
Opastus: Lue luentomonisteen luvut 2.3–2.6. U ja V ovat jatkuvasti tasajakautuneita. Yhteisjakauman tiheyteen käytä lausetta 2.10. Ilmoita sekä funktion lauseke, että se millä muuttujien arvoilla se pätee. Muualla se on varmaan nolla?

(b) Laske todennäköisyys, että Ulla saapuu ennen klo 12:20.
Opastus: Käytä pelkästään U:n jakaumaa.

(c) Laske geometrian avulla todennäköisyys, että Ulla saapuu ennen klo 12:15 ja Venla saapuu klo 12.30 ja 12:45 välillä.
Opastus: Väritä $[0, 60] \times [0, 60]$ -neliöön yllämainittua tapahtumaa vastaava suorakulmio ja selvitä sen pinta-ala. Käytä sitten tehtävänannossa annettua vihjettä kahden muuttujan integraalista.

(d) Laske (c)-kohdan todennäköisyys ilman geometriaa, hyödyntämällä U:n ja V:n riippumattomuutta.
Opastus: Osaat laskea U:ta koskevien tapahtumien todennäköisyyksiä, ja V:tä koskevien tapahtumien todennäköisyyksiä. Käytä kaavaa (2.17).

(e) Laske todennäköisyys, että Ulla saapuu yli 30 minuuttia Venlan jälkeen. Käytä samaa piirtämistekniikkaa kuin (c)-kohdassa.
Opastus: Alueen päättely vaatii hiukan miettimistä. Kokeile kiinnittää V:lle jokin arvo ja tutki, millainen U on silloin oltava. Kun alue on selvillä ja piirretty, selvitä sen pinta-ala. Muistele, miten kolmion pinta-ala lasketaan.

Kotitehtävät

2A3 (Satelliitin toiminta) Maata kiertävässä satelliitissa on anturi, jonka toiminta-aika X (yksikkönä vuosi) noudattaa eksponenttijakaumaa *taajuusparametrilla* $\lambda = 0.5$ (yksikkönä 1/vuosi).

(a) Etsi eksponenttijakauman tiheys- ja kertymäfunktio luentomonisteesta tai luentokalvoilta (1B). Tarkista kertymäfunktiota derivoimalla, että siten saadaan tiheysfunktio.

(b) Käyttäen kertymäfunktiota, laske todennäköisyydet tapahtumille $A = \{X \leq 1\}$, $B = \{X > 4\}$, ja $C = \{4 < X \leq 5\}$. Ilmoita tulokset ainakin kuudella desimaalilla. Selitä sanoin, mitä nämä kolme tapahtumaa tarkoittavat.

(c) Käyttäen b-kohdan tuloksia ja ehdollisen todennäköisyyden määritelmää, laske todennäköisyys $\mathrm{P}(C \mid B)$. Selitä sanoin mitä tässä laskettiin. Vertaa tapahtuman A todennäköisyyteen.

(d) Tarkastellaan hyvin lyhyttä aikaväliä $h = 0.01$ (vuotta). Jos anturi on kestänyt johonkin ajanhetkeen asti, mikä on todennäköisyys, että se hajoaa seuraavan h vuoden aikana? Vertaa tätä todennäköisyyttä lukuun λh ja selitä, miksi λ:aa kutsutaan eksponenttijakauman taajuusparametriksi (engl. rate parameter).

2A4 (Sumea logiikka.) Sumeassa logiikassa lauseilla on 0-1 totuusarvon sijasta reaaliarvoinen totuusarvo välillä $[0, 1]$. Tutkijat mallintavat erään lauseen totuusarvoa satunnaismuuttujalla X, jolla on tiheysfunktio

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

(a) Etsi vakion c arvo.

(b) Laske X:n kertymäfunktio ja piirrä siitä kuva.

(c) Laske todennäköisyys, että totuusarvo on vähintään 0.75.

(d) Määritä jakauman moodi eli piste, jossa tiheysfunktio $f(x)$ saavuttaa suurimman arvonsa.