

3B Normaaliapproksimaatio

Huom. Standardinormaalijakauman kertymäfunktion $F_Z(z) = \Phi(z)$ voi laskea esim. R:ssä komennolla `pnorm` tai Matlabissa/Octavessa komennolla `normcdf`. Jos tietokonetta tai tämän funktion osaavaa laskinta ei ole käytettävissä, voi käyttää esim. kurssisivulla kohdassa Materiaalit annettuja taulukoita. Mellinin taulukoissa on Φ annettu 0.01:n välein arvoille $-3.59 \dots 3.59$.

Joissakin taulukoissa annetaan vain positiivinen puoli, jolloin negatiivisella puolella täytyy hyödyntää normaalijakauman symmetriaa $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Tuntitehtävät

3B1 (Teiden suolaus) Tieverkon sulana pitämiseen on varastoitu suolaa 200 cm lumimäärän varalle. Yksittäisen talvipäivän aikana lunta sataa keskimäärin 4.5 cm, keskihajonnan ollessa 2.5 cm.

- Laske normaaliapproksimaation avulla arvio todennäköisyydelle, että varastoitu suola riittää 50 talvipäiväksi.
- Mitä lisäoletuksia oletuksia sinun piti tehdä (a)-kohdan ratkaisemisen yhteydessä? Ovatko kyseiset oletukset mielestäsi perusteltuja?

3B2 (Voitolla kasinolla) Kasinon rulettipelissä arvotaan jokaisella kierroksella tasaisen satunnaisesti numero joukosta $\{0, 1, \dots, 36\}$. Harry päättää panostaa joka kierroksella euron omalle onnennumerolleen. Mikäli rulettikuula osuu onnennumeroon, Harryn saa 36 euroa, eli hänen nettotuottonsa on 35 euroa. Muussa tapauksessa hän häviää panostamansa euron eli nettotuotto on -1 euro. Merkitään Harryn nettotuottoa n pelikierroksen jälkeen satunnaismuuttujalla $S_n = X_1 + \dots + X_n$, missä X_i on pelikierroksen i tuotto.

- Määritä satunnaismuuttujan X_i odotusarvo ja keskihajonta.
- Määritä satunnaismuuttujan S_n odotusarvo ja keskihajonta.

Laske normaaliapproksimaatiota käyttämällä arvio todennäköisyydelle, että Harry on voitolla:

- 30 pelikierroksen jälkeen,
- 3 000 pelikierroksen jälkeen,
- 300 000 pelikierroksen jälkeen.

Ensimmäinen ylläolevista todennäköisyyksistä voidaan laskea myös tarkasti:

- Laske tarkka arvo (c)-kohdan todennäköisyydelle ja vertaa sitä normaaliapproksimaation tuottamaan arvioon.

Vihje: Mieti kaikki tapahtumaketjut, jotka johtavat siihen että Harry on tappiolla 30 pelikierroksen jälkeen.

Kotitehtävät

3B3 (Kyselyn otoskoko) Tutkijat ovat laskeneet, että jos vähintään 100 henkilöä vastaa heidän postitse jaettavaan maakunnan laajuiseen kyselyynsä, on otoskoko tarpeeksi iso jatkopäätelmien tekemiseen. Kokemuksesta tiedetään, että vain 70% kyselyn vastaanottaneista palauttaa vastauksensa tutkijoille. Tämän takia tutkijat ovat päättäneet lähettää kyselylomakkeen yhteensä 150 henkilölle. Tutkijat olettavat, että kukin henkilö vastaa tai jättää vastaamatta toisista riippumatta.

- (a) Laske binomijakaumaa käyttämällä (ilman normaaliapproksimaatiota) todennäköisyys, että tutkijat saavat tasan x vastausta kyselyynsä, x :n arvoilla 100, 101 ja 130.

Katso binomijakauman tiheysfunktio luentomonisteen luvusta 5.1. Binomikertoimen $\binom{n}{x}$ laskemiseen kannattaa käyttää laskinta tai tietokonetta.

- (b) Määritä normaaliapproksimaatiota käyttämällä arvio todennäköisyydelle, jolla tutkijat saavat vähintään 100 vastausta kyselyynsä.

3B4 (Osakeportfolio) Markkinoilla on kahden yrityksen, Xanadun ja Ypsilonin osakkeet. Kummankin arvo tällä hetkellä on 100 euroa. Xanadun osakkeen tuottoa seuraavan vuoden aikana mallinnetaan satunnaismuuttujalla X , jolla on normaalijakauma odotusarvolla $\mu_X = 12$ ja keskihajonnalla $\sigma_X = 10$. Ypsilonin osakkeen tuotto on satunnaismuuttuja Y , jolla on normaalijakauma odotusarvolla $\mu_Y = 8$ ja keskihajonnalla $\sigma_Y = 10$. Osakkeiden tuotot oletetaan riippumattomiksi.

- (a) Abel ostaa 200 Xanadun osaketta, joten hänen tuottonsa tulee olemaan $A = 200X$. Määritä A :n jakauma. Mikä on todennäköisyys, että Abel menettää rahaa (saa negatiivisen tuoton)?
- (b) Bertta ostaa 100 Xanadun ja 100 Ypsilonin osaketta, joten hänen tuottonsa tulee olemaan $B = 100X + 100Y$. Määritä B :n jakauma. Mikä on todennäköisyys, että Bertta menettää rahaa?
- (c) Laske A :n ja B :n korrelaatio. Ovatko ne riippumattomat?
- (d) Määritä satunnaismuuttujan $A - B$ jakauma. Mikä on todennäköisyys, että Abel saa enemmän tuottoa kuin Bertta?

Vihje. Kahden normaalijakautuneen muuttujan summa on myös normaalijakautunut. Selvitä sen parametrit tuntemillasi kaavoilla. Muista myös mitä vakiolla kertominen tekee odotusarvolle ja keskihajonnalle. Huomaa lisäksi, että $-Y = (-1) \cdot Y$.