Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi: Vektorilaskennan kertaus

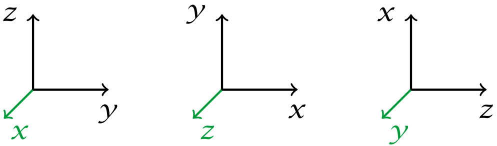
Henrik Wallén

28.2.2022

Karteesinen koordinaatisto

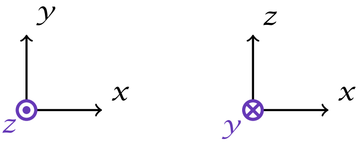
Koordinaattimuuttujat x, y, z voivat saada kaikkia reaaliarvoja.

x-, y- ja z-akselit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja muodostavat (tässä järjestyksessä) **oikeakätisen koordinaatiston:**



Alas vasemmalle piirretty akseli on viistosti kohti katsojaa.

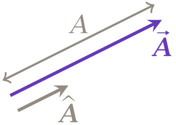
Usein käytetään **tikanheittosymboleita** missä tikan kärki (tai pelkkä piste) = kohti katsojaa, tikan pyrstö (tai pelkkä risti) = katsojasta poispäin:



Vektorit

Vektori $\vec{A}$ on matemaattinen olio jolla on suuruus eli pituus $A = \left|\vec{A}\right|$ ja suunta joka on esitettävissä yksikkövektorin $\hat{A}$ avulla:

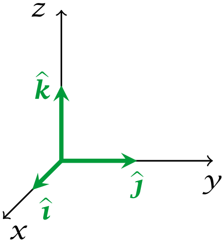
$$\boxed{\vec{A} = A\,\hat{A}} \qquad \text{missä } \left|\hat{A}\right| = 1 \text{ ja } \hat{A} \upuparrows \vec{A}$$



Usein vektoria esitetään **komponenttimuodossa**

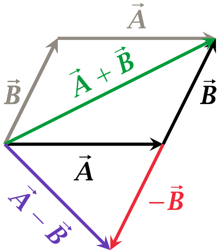
$$\boxed{\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}}$$

missä skalaarit A_x, A_y, A_z ovat vektorin x, y, z-komponentit ja $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ ovat karteesisen koordinaatiston **kantavektorit**.



Vektorisummaus

Kahden vektorin summa (ja erotus) graafisesti:



$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

Komponenttimuodossa:

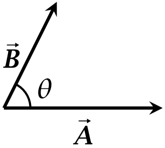
$$\vec{A}=A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k}$$

$$\vec{B}=B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}+B_z\hat{k}$$

$$\vec{A}+\vec{B}=\left(A_x+B_x\right)\hat{\imath}+\left(A_y+B_y\right)\hat{\jmath}+\left(A_z+B_z\right)\hat{k}$$

Pistetulo (= skalaaritulo = sisätulo)

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta}$$



$$(0 \leq \theta \leq \pi)$$

Komponenttimuodossa

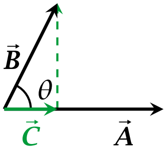
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Vektorin pituus (= suuruus = itseisarvo) ja yksikkövektori

$$A = \left|\vec{A}\right| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}, \qquad \hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$$

Vektorin $\vec{B}$ komponentti vektorin $\vec{A}$ suunnassa

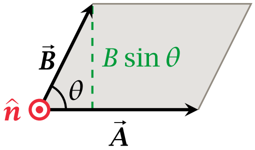
$$\vec{C} = \hat{A}\,(B\cos\theta) = \hat{A}\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A} = \hat{A}\left(\hat{A} \cdot \vec{B}\right) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{A} \cdot \vec{A}}\,\vec{A}$$



(Muualla käytetään usein merkintää $\vec{B}_A$ tälle ns. projektiovektorille.)

Ristitulo (= vektoritulo = ulkotulo)

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \hat{n}\, AB \sin\theta = -\vec{B} \times \vec{A}}$$



missä $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = AB \sin\theta$ on harmaan suunnikkaan pinta-ala ja $\hat{n}$ on suunnikkaan normaalivektori oikean käden säännön mukaisesti (tässä kohti katsojaa)

Komponenttimuodossa

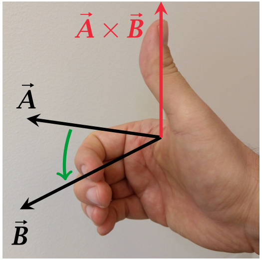
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\hat{\imath} + \left(A_z B_x - A_x B_z\right)\hat{\jmath} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\hat{k}$$

Kaikille vektoreille

$$\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$$

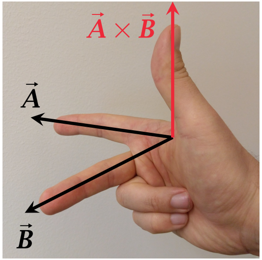
Oikean käden sääntö ristitulon suunnalle

Oppikirjan versio



Oikean käden peukalo osoittaa ristitulon $\vec{A} \times \vec{B}$ suuntaan, kun muut sormet kaartuvat vektorin $\vec{A}$ suunnasta kohti vektorin $\vec{B}$ suuntaa.

Toinen suosittu versio



etusormi = vektorin $\vec{A}$ suunta
keskisormi = vektorin $\vec{B}$ suunta
peukalo = ristitulon $\vec{A} \times \vec{B}$ suunta

Ota jompikumpi sääntö käyttöön ja ole tarkkana suunnan kanssa!

Lisää piste- ja ristituloja

Kohtisuoruus ja yhdensuuntaisuus (kun $\vec{A}, \vec{B} \neq \vec{0}$):

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} \perp \vec{B}$$
$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} \parallel \vec{B}$$

Kantavektorit ovat ortonormaaliset:

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$
$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0$$

Kantavektorien kätisyys ja ristitulo:

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}, \quad \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}, \quad \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$
$$\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}, \quad \hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}, \quad \hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$$

Muistisääntö: jos kantavektorit ovat oikeassa järjestyksessä $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \ldots$ saadaan plusmerkki.

(Vektorin ristitulo itsensä kanssa on nolla, joten $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$).

Kolmitulot

Skalaarikolmitulo, eli vektorien $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ virittämän suuntaissärmiön suunnistettu tilavuus

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Vektorikolmitulo

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$$ (”bac-cab” sääntö)