J Kohonen


# 1B Diskreetit satunnaismuuttujat

Tässä harjoituksessa tarvitaan *satunnaismuuttujan* ja *jakauman* käsitteitä, jotka kannattaa selvittää luentomateriaaleista. Lisäksi tarvitaan kombinatoriikasta tulo- ja summaperiaatetta sekä binomikertoimia (luentokalvot 1A ja luentomonisteen luku 1.8).

Merkinnöistä: Leikkaustapahtuman todennäköisyyttä $\mathrm{P}(A \cap B)$ saatetaan merkitä myös paremmin luonnollista kieltä vastaavasti $\mathrm{P}(A \text{ ja } B)$ tai lyhyesti $\mathrm{P}(A, B)$.

## Tuntitehtävät

**1B1** (Susipari lintutarhassa) Lintutarhassa asuu neljä ankkaa, neljä hanhea ja kaksi kanaa. Yön pimeydessä lintutarhaan saapuu kaksi sutta, joista kumpikin pyydystää yhden satunnaisesti valitsemansa linnun. Merkitään

$$\begin{aligned} X &= \text{pyydystettyjen ankkojen lukumäärä}, \\ Y &= \text{pyydystettyjen hanhien lukumäärä}. \end{aligned}$$

(a) Määritä satunnaismuuttujan $X$ jakauma listaamalla taulukkoon $X$:n mahdolliset arvot ja niiden todennäköisyydet.

(b) Määritä satunnaismuuttujan $Y$ jakauma.

(c) Määritä satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ yhteisjakauma listaamalla parin $(X, Y)$ mahdollisten arvojen todennäköisyydet $3 \times 3$ -taulukkoon.

(d) Laske c-kohdan taulukon rivi- ja sarakesummat ja vertaa niitä a- ja b-kohtien taulukoihin.

(e) Laske c-kohdan taulukon avulla todennäköisyys, että susipari pyydystää yhtä monta ankkaa ja hanhea.

(f) Selvitä c-kohdan taulukon avulla, ovatko satunnaismuuttujat $X$ ja $Y$ stokastisesti riippuvat vai riippumattomat?

Jos diskreetin satunnaismuuttujan käsite ei ole vielä hyvin tuttu, voi tehtävän ratkaista myös ajattelemalla yksinkertaisesti keskenään poissulkevia *tapahtumia* $X_1, X_2, \ldots$, missä tapahtuma $X_i$ tarkoittaa "pyydystettiin $i$ ankkaa". Tapahtuma $X_i$ vastaa satunnaismuuttujan $X$ "pyydystettyjen ankkojen määrä" arvoa $X = i$.

**Ratkaisu.**

(a) Pyydystettyjen ankkojen lukumäärä $X$ voi saada arvot 0,1,2. Satunnaismuuttujan $X$ jakauman voi laskea ainakin kahdella eri tapaa. Molemmilla tavoilla saadaan sama vastaus, jonka mukaan pyydystettyjen ankkojen $X$ jakauma voidaan esittää taulukkona

| $k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = k)$ | $\frac{15}{45}$ | $\frac{24}{45}$ | $\frac{6}{45}$ |

Murtoluvut voi myös supistaa sievemmiksi. Toisaalta niitä on helpompi vertailla ja laskea yhteen, jos niissä on sama jakaja.

**Tapa 1: Kombinatoriikka.** Lintutarhan 10 linnusta pyydystetään tasaisen satunnaisesti valittu 2 linnun joukko. Korvamerkitään linnut (mentaalisesti — lintuja vahingoittamatta) niin, että ne voidaan tunnistaa. Tällöin eri tapoja valita 10 linnun joukosta 2 linnun (järjestämätön) joukko on

$$\binom{10}{2} = 45.$$

(i) Eri tapoja valita kahden linnun (järjestämätön) joukko, joka sisältää täsmälleen nolla ankkaa, on yhtä monta kuin tapoja valita 2 linnun joukko 6 ei-ankan joukosta, eli

$$\binom{6}{2} = 15.$$

Näin siis $\mathrm{P}(X=0) = \binom{6}{2}/\binom{10}{2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

(ii) Eri tapoja valita kahden linnun joukko, joka sisältää täsmälleen yhden ankan, ts. yhden neljästä ankasta ja yhden kuudesta ei-ankasta, on

$$\binom{4}{1} \times \binom{6}{1} \;=\; 4 \times 6 \;=\; 24.$$

Näin siis $\mathrm{P}(X=1) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$.

(iii) Eri tapoja valita kahden linnun joukko, joka sisältää täsmälleen kaksi ankkaa, on

$$\binom{4}{2} \;=\; 6.$$

Näin siis $\mathrm{P}(X=2) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$. (Tämän kohdan voi myös laskea kokonaistodennäköisyyden kaavan avulla vähentämällä ykkösestä aiempien kohtien tulokset.)

**Tapa 2: Susien numerointi.** Korvamerkitään (mentaalisesti) sudet numeroin 1 ja 2, ja merkitään

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{suden 1 pyydystämien ankkojen lukumäärä}, \\ I_2 &= \text{suden 2 pyydystämien ankkojen lukumäärä}. \end{aligned}$$

Tulosäännön perusteella

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X=0) &= \mathrm{P}(I_1=0, I_2=0) \\ &= \mathrm{P}(I_1=0)\,\mathrm{P}(I_2=0 \mid I_1=0) \\ &= \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \\ &= \frac{30}{90}. \end{aligned}$$

Osituskaavan avulla

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(I_1=0, I_2=1) + P(I_1=1, I_2=0) \\ &= P(I_1=0)\,P(I_2=1 \,|\, I_1=0) \;+\; P(I_1=1)\,P(I_2=0 \,|\, I_1=1) \\ &= \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \;+\; \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \\ &= \frac{48}{90}. \end{aligned}$$

Kokonaistodennäköisyyden kaavasta puolestaan todetaan, että

$$P(X=2) \;=\; 1 - P(X=0) - P(X=1) \;=\; 1 - \frac{30}{90} - \frac{48}{90} \;=\; \frac{12}{90}.$$

(b) Symmetrian perusteella pyydystettyjen hanhien lukumäärä $Y$ noudattaa samaa jakaumaa kuin $X$, joten $Y$:n jakauma voidaan esittää taulukkona

| $k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(Y=k)$ | $\frac{15}{45}$ | $\frac{24}{45}$ | $\frac{6}{45}$ |

(c) Pari $(X,Y)$ voi saada arvot $(0,0),(0,1),(0,2),(1,1),(1,0),(2,0)$. Lasketaan näiden arvojen todennäköisyydet kohta kohdalta:

Tapahtuma $(X,Y)=(0,0)$ sattuu, kun pyydystetyksi päätyy 2 kanaa, joten

$$P(X=0, Y=0) \;=\; \frac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}} \;=\; \frac{1}{45}.$$

Tapahtuma $(X,Y)=(0,1)$ sattuu, kun pyydystetyksi päätyy 1 hanhi ja 1 kana, joten

$$P(X=0, Y=1) \;=\; \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{2}} \;=\; \frac{8}{45}.$$

Tapahtuma $(X,Y)=(0,2)$ sattuu, kun pyydystetyksi päätyy 2 hanhea, joten

$$P(X=0, Y=2) \;=\; \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} \;=\; \frac{6}{45}.$$

Tapahtuma $(X,Y)=(1,1)$ sattuu, kun pyydystetyksi päätyy 1 ankka ja 1 hanhi, joten

$$P(X=1, Y=1) \;=\; \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} \;=\; \frac{16}{45}.$$

Symmetrian perusteella $(X,Y)$ saa arvot $(1,0)$ ja $(0,1)$ yhtä suurella todennäköisyydellä; samoin arvot $(2,0)$ ja $(0,2)$. Koska $(X,Y)$ ei voi saada arvoja, jossa yli kaksi lintua tulee pyydystetyksi, ovat lukuparien $(1,2),(2,1),(2,2)$ todennäköisyydet nollia. Satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ jakauma voidaan siis esittää taulukkona muodossa:

| | | $Y=0$ | $Y=1$ | $Y=2$ |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0 | $\frac{1}{45}$ | $\frac{8}{45}$ | $\frac{6}{45}$ |
| | 1 | $\frac{8}{45}$ | $\frac{16}{45}$ | 0 |
| | 2 | $\frac{6}{45}$ | 0 | 0 |

(d) Ylläolevan taulukon rivi- ja sarakesummat ovat:

| | | $Y=0$ | $Y=1$ | $Y=2$ | Yht |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0 | $\frac{1}{45}$ | $\frac{8}{45}$ | $\frac{6}{45}$ | $\frac{15}{45}$ |
| | 1 | $\frac{8}{45}$ | $\frac{16}{45}$ | 0 | $\frac{24}{45}$ |
| | 2 | $\frac{6}{45}$ | 0 | 0 | $\frac{6}{45}$ |
| | Yht | $\frac{15}{45}$ | $\frac{24}{45}$ | $\frac{6}{45}$ | 1 |

Havaitaan, että yhteisjakaumaa kuvaavan taulukon rivisummat tuottavat $X$:n jakauman, ja sarakesummat $Y$:n jakauman.

Tämä on yleinen yhteisjakaumien ominaisuus: kahden diskreetin satunnaismuuttujan $X$ ja $Y$ yhteisjakaumasta voidaan aina määrittää $X$:n ja $Y$:n jakaumat laskemalla rivi- ja sarakesummat. Tämän takia samaan satunnaisilmiöön liittyvien kahden satunnaismuuttujan erillisiä jakaumia kutsutaan *reunajakaumiksi*. Samalla saatiin vielä kolmas tapa ratkaista kohdat (a) ja (b).

(e) Väritetään yhteisjakauman taulukkoon punaisella tapahtumaa $\{X = Y\}$ vastaavien tapausten todennäköisyydet:

| | | $Y=0$ | $Y=1$ | $Y=2$ |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0 | $\frac{1}{45}$ | $\frac{8}{45}$ | $\frac{6}{45}$ |
| | 1 | $\frac{8}{45}$ | $\frac{16}{45}$ | 0 |
| | 2 | $\frac{6}{45}$ | 0 | 0 |

Laskemalla nämä yhteen todetaan, että $\mathrm{P}(X = Y) = 17/45$.

(f) Satunnaismuuttujat $X$ ja $Y$ ovat stokastisesti riippuvat. Yhteisjakauman taulukon perusteella voidaan esim. todeta, että

$$\mathrm{P}(Y = 2 \,|\, X = 2) \;=\; \frac{\mathrm{P}((X,Y) = (2,2))}{\mathrm{P}(X = 2)} \;=\; \frac{0}{6/45} \;=\; 0,$$

kun taas

$$\mathrm{P}(Y = 2) \;=\; \frac{6}{45}.$$

**1B2** (Tuntematon noppa.) Laatikossa on neljä noppaa, yksi 4-sivuinen, yksi 6-sivuinen ja kaksi 8-sivuista. Kaikki nopat on numeroitu normaaliin tapaan ykkösestä eteenpäin. Ystäväsi valisee laatikosta salaa yhden nopan umpimähkään ja heittää sitä kerran näyttämättä noppaa sinulle. Merkitään

$$\begin{aligned} S &= \text{valitun nopan sivujen lukumäärä,} \\ T &= \text{nopanheiton tulos.} \end{aligned}$$

(a) Määritä satunnaismuuttujan $S$ jakauma listaamalla taulukkoon $S$:n mahdolliset arvot ja niiden todennäköisyydet.

(b) Määritä satunnaismuuttujien $S$ ja $T$ yhteisjakauma listaamalla $3 \times 8$ -taulukkoon parin $(S, T)$ mahdollisten arvojen todennäköisyydet.

(c) Määritä (b)-kohdassa lasketun yhteisjakauman avulla satunnaismuuttujan $T$ jakauma.

(d) Ystäväsi paljastaa, että nopanheiton tulos on 3. Selvitä satunnaismuuttujan $S$ ehdollinen jakauma tämän tiedon valossa. Toisin sanoen, kullekin $S$:n mahdolliselle arvolle $i$, laske ehdollinen todennäköisyys $\mathrm{P}(S = i \,|\, T = 3)$.

**Ratkaisu.**

(a) Nopan valintaa kuvaava satunnaisilmiö voidaan mieltää tasaisen satunnaisena valintana neljän alkion joukosta, jossa 8-sivuisia noppia on kaksi ja muita yksi. Näin ollen valitun nopan sivumäärän $S$ jakauma voidaan taulukoida muodossa

| $i$ | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(S = i)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |

(b) Satunnaismuuttuja $S$ voi saada arvoja $\{4, 6, 8\}$ ja satunnaismuuttuja $T$ arvoja $\{1, 2, \ldots, 8\}$. Näin ollen parin $(S, T)$ mahdolliset arvot kuuluvat joukkoon

$$\{(i, j) : i = 4, 6, 8,\ \ j = 1, 2, \ldots, 8\}.$$

Parin $(S, T)$ jakauma voidaan siis esittää taulukolla, jossa on rivit $4, 6, 8$ ja sarakkeet $\{1, 2, \ldots, 8\}$. Määritetään ensiksi tämän taulukon ensimmäinen rivi.

Ehdolla $S = 4$ noudattaa nopanheiton tulos $T$ joukon $\{1, 2, 3, 4\}$ tasajakaumaa, joten

$$\mathrm{P}(T = k \,|\, S = 4) \;=\; \frac{1}{4}$$

kaikilla $k = 1, \ldots, 4$. Koska $\mathrm{P}(S = 4) = \frac{1}{4}$, saadaan ehdollisen todennäköisyyden määritelmäkaavasta

$$\mathrm{P}(S = 4, T = j) \;=\; \mathrm{P}(S = 4)\,\mathrm{P}(T = j \,|\, S = 4) \;=\; \frac{1}{16},$$

kun $j \in \{1,2,3,4\}$. Muilla $j$:n arvoilla $\mathrm{P}(S = 4, T = j) = 0$. Näin ollen taulukon ensimmäinen rivi on ...

Samaan tapaan voidaan laskea kaksi muuta riviä. Näin etenemällä saadaan taulukko

| | $T$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | 0 | 0 |
| 8 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

(c) Laskemalla yhteisjakauman taulukon rivi- ja sarakesummat saadaan:

| | $T$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Yht |
| 4 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 6 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 8 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{2}$ |
| Yht | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{48}$ | $\frac{5}{48}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | |

Itseasiassa rivisummia ei tarvitse laskea, sillä $S$:n jakauma tunnetaan jo (a)-kohdan perusteella. Sarakesummista saadaan $T$:n jakauma:

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(T = j)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{48}$ | $\frac{5}{48}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

(d) Tapahtuman $T = 3$ tn on (c)-kohdan mukaan $\mathrm{P}(T = 3) = \frac{1}{6}$. Näin ollen ehdollisen todennäköisyyden määritelmäkaavasta

$$\mathrm{P}(S = i \,|\, T = 3) \;=\; \frac{\mathrm{P}(S = i, T = 3)}{\mathrm{P}(T = 3)}$$

kaikilla $i \in \{4,6,8\}$. Ylläolevat todennäköisyydet voidaan lukea yhteisjakauman taulukosta jakamalla sarakkeen 3 alkiot (alla punaisella) sarakkeen 3 summalla $\frac{1}{6}$.

| | $T$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Yht |
| 4 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 6 | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 8 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{2}$ |
| Yht | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{48}$ | $\frac{5}{48}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | |

Näin ollen satunnaismuuttujan $S$ jakauma ehdolla $T = 3$ voidaan listata muodossa

| $i$ | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(S = i \mid T = 3)$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |

## Kotitehtävät

**1B3** (Lasten tekeminen) Pariskunta päättää hankkia lapsia kunnes ainakin yksi seuraavista ehdoista täyttyy:

- Heillä on kaksi tyttölasta.
- Heillä on yhteensä neljä lasta.

Perheeseen syntyy lapsia yksi kerrallaan niin, että jokainen lapsi on yhtä suurella todennäköisyydellä tyttö tai poika, aiemmista synnytyksistä riippumattomasti. Oletetaan, että perhe on jo lopettanut lasten hankinnan (jompikumpi tai molemmat ylläolevista ehdoista on siis täyttynyt) ja merkitään $L = T + P$, missä

$$\begin{aligned} T &= \text{tyttölasten lukumäärä perheessä,} \\ P &= \text{poikalasten lukumäärä perheessä.} \end{aligned}$$

(a) Määritä satunnaismuuttujan $L$ jakauma.
Vihje. Tutki mahdollisia lapsijonoja syntymäjärjestyksessä, esimerkiksi PPT (ensin kaksi poikaa ja sitten tyttö). Tutki, miten mahdolliset jonot syntyvät alkaen ensimmäisestä lapsesta ja haarautuen aina vaihtoehtojen mukaan. Kullekin mahdolliselle jonolle laske todennäköisyys, ja lopeta jonon kasvattaminen kun jompikumpi lopetusehto täyttyy.

(b) Määritä satunnaismuuttujien $T$ ja $P$ yhteisjakauma.

(c) Millä todennäköisyydellä perheessä on enemmän tyttölapsia kuin poikalapsia?

(d) Määritä satunnaismuuttujien $L$ ja $T$ yhteisjakauma.

**Arviointiohje.** Kohdista (a)–(d) saa 0.5 pistettä per kohta ja tehtävän kokonaispisteet pyöristetään ylöspäin lähimpään kokonaislukuun.

**Ratkaisu.**

(a) Satunnaismuuttuja $L$ voi saada vain arvot 2, 3 ja 4 (arvo $L = 1$ ei ole mahdollinen, koska tällöin kumpikaan ehdoista ei voi täyttyä; ja nelosta suuremmat arvot eivät ole mahdollisia, koska lastenhankinta pysähtyy viimeistään neljännen lapsen kohdalla). Arvo $L = 2$ saadaan vain jos kaksi ensimmäistä lasta ovat molemmat tyttöjä (TT), eli todennäköisyydellä $(1/2)\cdot(1/2) = 1/4$. Arvo $L = 3$ saadaan, kun kolmas lapsi on tyttö ja samalla perheen toinen tyttö, eli lapsijonoilla TPT ja PTT, eli todennäköisyydellä $(1/2)^3 + (1/2)^3 = 1/4$. Arvo $L = 4$ saadaan, kun kolmessa ensimmäisessä lapsessa on 0 tai 1 tyttöä, eli lapsijonoilla PPP, PPT, PTP, TPP, eli todennäköisyydellä $4 \times (1/2)^3 = 1/2$. (Neljäs lapsi voi tällöin olla kumpi tahansa ja lastensaanti päättyy.) Näin saadaan satunnaismuuttujalle $L$ jakauma

| $j$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(L = j)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |

Huomataan vielä, että $L$:n mahdollisten arvojen (2,3,4) todennäköisyyksien summa on 1 kuten pitääkin.

(b) Edellisessä kohdassa jo lueteltiin mahdolliset lapsijonot. Ne olivat:

- TT (jolloin lapsia on kaksi, $T = 2$ ja $P = 0$); tämän jonon todennäköisyys on $1/4$
- TPT ja PTT (jolloin lapsia on kolme, $T = 2$ ja $P = 1$); kummankin jonon todennäköisyys on $1/8$, eli yhteensä $1/8 + 1/8 = 1/4$
- PPPP, PPPT, PPTP, PPTT, PTPP, PTPT, TPPP, TPPT (jolloin lapsia on neljä); kunkin jonon todennäköisyys on $1/16$. Näistä kahdeksasta jonosta yksi on sellainen, jossa ei ole yhtään tyttöä ($P = 4, T = 0$) ja tämän tn on siis $1/16$.
  Neljässä jonossa on yksi tyttö ($P = 3, T = 1$) ja näiden tn on yhteensä $4 \times (1/16) = 1/4$.
  Kolmessa jonossa on kaksi tyttöä ($P = 2, T = 2$) ja näiden tn on yhteensä $3 \times (1/16) = 3/16$.

Muita mahdollisuuksia $P$:n ja $T$:n arvoille ei olekaan; esimerkiksi jos tyttöjä ei ole kahta, niin lapsia täytyy olla täsmälleen neljä, ja toisaalta lapsia ei voi olla yhteensä enempää kuin neljä ($P+T \geq 5$ on mahdoton). Mahdottomat tapahtumat saavat todennäköisyyden nolla.
Keräämällä havainnot taulukoksi saamme

| | | $P$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | Yht |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| $T$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| | 2 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | 0 | 0 | $\frac{11}{16}$ |
| | Yht | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ | 1 |

Kun yhteisjakauman taulukko on saatu täytettyä, kannattaa laskea reunajakaumat ja koko taulukon summa. Jos koko taulukon summa ei ole 1, on jotain pielessä.

(c) Väritetään yhteisjakauman taulukkoon tapaukset, jossa $T > P$.

| | | $P$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | Yht |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| $T$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| | 2 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | 0 | 0 | $\frac{11}{16}$ |
| | Yht | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ | 1 |

Laskemalla väritetyt todennäköisyydet yhteen nähdään, että tyttöjä on enemmän kuin poikia todennäköisyydellä 50%.

(d) Käytetään (b)-kohdan taulukkoa. Aina, kun $T$ ja $P$ saavat tietyt arvot, niin myös $L$:n arvo tiedetään. Esimerkiksi kun $T = 2$ ja $P = 1$ (mikä tapahtuu taulukon mukaan tn:llä 1/4), niin silloin on $T = 2$ ja $L = 3$.
Otetaan (b)-kohdan $(T, P)$-taulukosta kukin mahdollinen tapahtuma ja pannaan sen todennäköisyys vastaavaan kohtaan $(T, L)$-taulukkoon, huomioiden että $L = T + P$.

| | | $L$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | Yht |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| $T$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| | 2 | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{11}{16}$ |
| | Yht | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |

Taulukon alimmalle riville on laskettu sarakesummat eli $L$:n reunajakauma. Huomataan, että se vastaa (a)-kohdassa laskettua, kuten pitääkin.

**1B4** (Noppajonon maksimi) Tavallista kuusisivuista noppaa heitetään neljä kertaa. Olkoot heittotulokset $X_1, X_2, X_3, X_4$ ja koko jonon maksimi eli suurin tulos $M$. Jos esim. heittotulokset ovat $1, 4, 2, 3$, niin $M = 4$.

(a) Mikä on tapahtuman $\{M \leq 3\}$ todennäköisyys, toisin sanoen kertymäfunktion arvo $F_M(3)$?
Vihje. Olisi toki mahdollista luetella kaikki $6^4 = 1296$ mahdollista tulosjonoa ja laskea yksitellen, monessako niistä $M \leq 3$. Tämä olisi hyvin työlästä. Laske mieluummin seuraavasti. Millaisia on jokaisen heittotuloksen $X_i$ oltava, jotta $M \leq 3$? Mikä on todennäköisyys sille, että kukin heittotulos erikseen toteuttaa tämän ehdon? Laskutoimituksen pitäisi nyt olla helppo.

(b) Mitkä ovat tapahtumien $\{M \leq k\}$ todennäköisyydet, kun $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$?

(c) Päättele edellisen kohdan ja todennäköisyyden erotussäännön avulla tapahtumien $\{M = k\}$ todennäköisyydet eli tiheysfunktion arvot $f_M(k)$, kun $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Esitä nyt $M$:n jakauma taulukkona.

(d) Osoita, että $M$ ja $X_1$ eivät ole riippumattomat, näyttämällä että luentomonisteen yhtälö (2.17) ei toteudu. Vihje: Tarkastele esimerkiksi tapahtumia $\{M = 1\}$ ja $\{X_1 = 2\}$.

**Arviointiohje.** 0.5 pistettä per kohta, pyöristetään ylöspäin.

**Ratkaisu.**

(a) Se, että jonon suurin tulos on enintään 3, on sama asia kuin että *jokainen* heittotulos on enintään 3, toisin sanoen $X_1 \leq 3$ **ja** $X_2 \leq 3$ **ja** $X_3 \leq 3$ **ja** $X_4 \leq 3$. Kukin nopanheitto tuottaa tällaisen tuloksen todennäköisyydellä $3/6 = 1/2$, ja koska neljä nopanheittoa ovat riippumattomat, on $P(M \leq 3) = (1/2)^4 = 1/16$.

(b) Samaan tapaan kuin a-kohdassa, $M \leq k$ täsmälleen silloin, kun jokainen heitoista on enintään $k$, eli todennäköisyydellä $(k/6)^4 = k^4/1296$. Kysytyt todennäköisyydet ovat:

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(M \leq k)$ | $\frac{1}{1296}$ | $\frac{16}{1296}$ | $\frac{81}{1296}$ | $\frac{256}{1296}$ | $\frac{625}{1296}$ | $\frac{1296}{1296}$ |

Huomaa, että tässä taulukossa ei ole $M$:n tiheysfunktion, vaan kertymäfunktion arvoja. Arvojen summa ei ole 1 eikä pidäkään olla. Sen sijaan viimeinen arvo on 1.

(c) Tapaus $k = 1$ on helppo: Tapahtumat $\{M = 1\}$ ja $\{M \leq 1\}$ ovat samat, joten $P(M = 1) = P(M \leq 1) = 1/1296$.
Tapaus $k = 2$: Käytetään vihjeen mukaisesti erotussääntöä. Huomataan, että $M = 2$ täsmälleen silloin, kun $M \leq 2$ mutta ei $M \leq 1$. Siten $P(M = 2) = P(M \leq 2) - P(M \leq 1) = 16/1296 - 1/1296 = 15/1296$.
Samaan tapaan todetaan kaikilla $k = 2, 3, 4, 5, 6$, että $P(M = k) = P(M \leq k) - P(M \leq k - 1) = k^4/1296 - (k-1)^4/1296$. Taulukkona:

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(M = k)$ | $\frac{1}{1296}$ | $\frac{15}{1296}$ | $\frac{65}{1296}$ | $\frac{175}{1296}$ | $\frac{369}{1296}$ | $\frac{671}{1296}$ |

Nyt taulukossa on $M$:n tiheysfunktion arvoja, joten niiden summa on 1.

(d) Jos suurin tulos on 1, niin kaikki tulokset ovat ykkösiä, erityisesti ensimmäinenkin tulos on silloin ykkönen. Siten tapahtuma $\{M = 1\} \cap \{X_1 = 2\}$ on mahdoton ja sen todennäköisyys on nolla. Koska

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(M = 1) \cdot \mathrm{P}(X_1 = 2) = (1/1296) \cdot (1/6) \\ \neq &\mathrm{P}(M = 1,\ X_1 = 2) = 0 \end{aligned}$$

niin satunnaismuuttujat $M$ ja $X_1$ ovat stokastisesti riippuvat.

Riippuvuuden olisi voinut osoittaa monella muullakin tavalla, esimerkiksi tarkastelemalla tapahtumia $M = 1$ ja $X_1 = 1$.