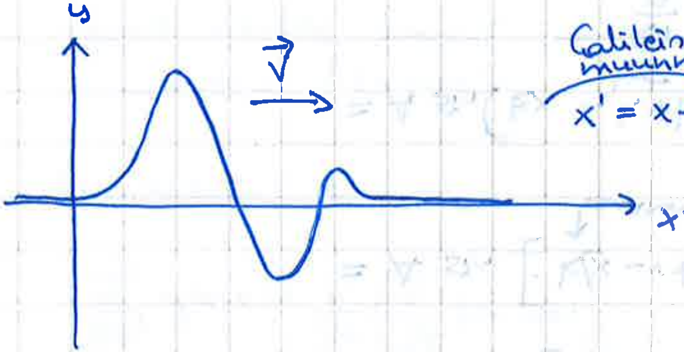
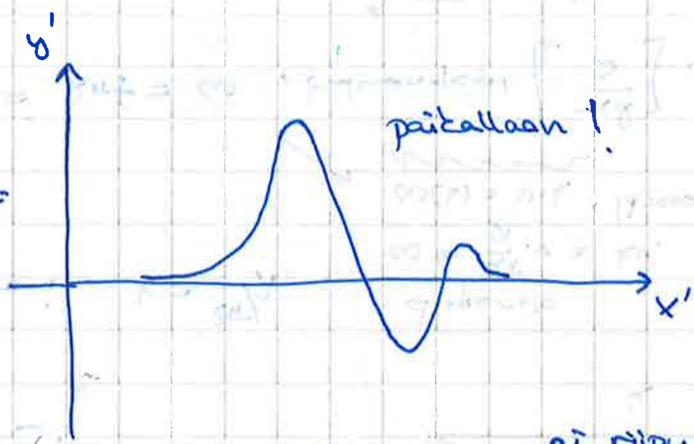
Etenevä aalto (1D)



Galilein muunnos

$x' = x - vt$



paikallaan!

$y'(x',t) = f(x')$. ei riipu ajasta

Galilein muunnos takaisin

$$y(x,t) = y'(x-vt,t) = \underline{\underline{f(x-vt)}}$$

oikealle nopeudella v etenevä mielivaltainen muodonsasäilyttävä aalto(paketti).

var. $f(x+vt)$ etenee vasemmalle.

Aaltoyhtälö

yleisesti oikealle etenevä aalto

$$y(x,t) = f(x-vt)$$

Analysoidaan hieman.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} f(x-vt)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(-v \cdot f'(x-vt)\right)$$

$$= +v^2 f''(x-vt).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x-vt)$$

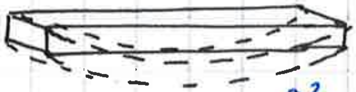
$$= f''(x-vt)$$

sijoitus

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t)}$$

Aaltoyhtälö

Jäykän jousen aaltoyhtälö



$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) - \frac{EI}{\mu}\frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x,t)$$

Youngin moduli

jäykyys (pinta-alan toisen momentti)

pituustiheys [kg/m]

lineaarinen → ~~superpositio~~ interferenssi. yms.

ei muotonsa säilyttävää aaltopakettiratkaisua.

Mutta harmoninen ratkaisu toimii!

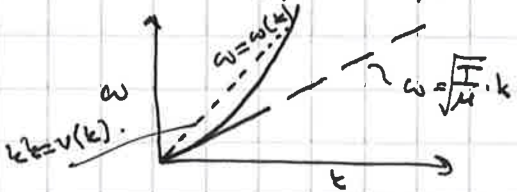
Yritä

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

⇒

$$-A\omega^2 \sin(kx-\omega t) = -\frac{T}{\mu} k^2 A\sin(kx-\omega t) - \frac{EI}{\mu}\cdot k^4 A\sin(kx-\omega t)$$

$$\Rightarrow\ -\omega^2 = -\frac{T}{\mu}k^2 - \frac{EI}{\mu}k^4. \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{T}{\mu}k^2 + \frac{EI}{\mu}k^4} = \omega(k)$$



toisaalta

$$v = \frac{\omega(k)}{k}$$

$$\Rightarrow v(k) = \frac{\omega(k)}{k}$$