BECS-C2102 Sähkö ja magnetismi: luennoilla käytettyä matikkaa **10.2.2016**

Tähän monisteeseen kokoan luennoilla käytettyjä tärkeitä matemaattisia relaatioita. Naputtelen tätä lennossa joka luennon yhteydessä, joten typoja varmasti tupsahtelee. Korjauksia sopii laittaa spostitse.

I luento, 4.1.

Diracin deltafunktio

$$\int_{V'} \delta(\vec{r})\, dV' = \begin{cases} 1, & \vec{r} \in V' \\ 0, & \vec{r} \notin \overline{V'} \end{cases} \tag{1}$$

$$\int_{V'} f(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\, dV' = \begin{cases} f(\vec{r}), & \vec{r} \in V' \\ 0, & \vec{r} \notin \overline{V'} \end{cases} \tag{2}$$

Differentiaalinen avaruuskulmaelementti

$$d\Omega(\vec{r}\,') = \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \cdot d\vec{S} \tag{3}$$

Pinnan S virittämä avaruuskulma

$$\Omega_S(\vec{r}\,') = \int_S \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \cdot d\vec{S} \tag{4}$$

Suljetun pinnan virittämä avaruuskulma

$$\Omega_{\partial V}(\vec{r}\,') = \oint_{\partial V} \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi, & \vec{r}\,' \in V \\ 0, & \vec{r}\,' \notin \overline{V} \end{cases} \tag{5}$$

II luento, 5.1.

Gaussin integraalilause

$$\oint_{\partial V} d\vec{S} * \vec{A} = \int_V \nabla * \vec{A}\, dV, \quad * = \cdot \text{ tai } \times \tag{6}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{A}\, dV \tag{7}$$

Stokesin integraalilause

$$\oint_{\partial S} d\vec{l} * \vec{A} = \int_S (d\vec{S} \times \nabla) * \vec{A}, \quad * = \cdot \text{ tai } \times \tag{8}$$

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \tag{9}$$

Paikkavektorirelaatioiden nablausta

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \tag{10}$$

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{11}$$

Skalaarifunktion gradientin roottori

$$\nabla \times \nabla\psi = 0 \tag{12}$$

III luento, 11.1.

Suunnattu differenssi

$$\int_{c:\vec{a}}^{\vec{b}} d\phi = \int_{c:\vec{a}}^{\vec{b}} \nabla\phi \cdot \vec{dl} \tag{13}$$

Tulon derivointi, osa I

$$\nabla \cdot (\vec{A}\psi) = (\nabla \cdot \vec{A})\psi + \vec{A} \cdot \nabla\psi \tag{14}$$

Osittaisintegrointi: (14) ja (7),

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{A})\psi \, dV = \int_V \nabla \cdot (\vec{A}\psi) - \vec{A} \cdot \nabla\psi \, dV \tag{15}$$

$$= \oint_{\partial V} (\psi\vec{A}) \cdot d\vec{S} - \int_V \vec{A} \cdot \nabla\psi \, dV \tag{16}$$

Pintaintegraalitemppu: tilavuuden kasvattaminen äärettömäksi, osittaisintegrointi, pintaintegraalin tarkastelu pinnan lähestyessä ääretöntä.

V luento, 18.1.

Diffisratkaisuja:

$$X'' = k^2 X \Rightarrow X(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) \tag{17}$$

$$X'' = -k^2 X \Rightarrow X(x) = Ce^{kx} + De^{-kx} \tag{18}$$

Laplacen yhtälön yleisiä ratkaisuja karteesisessa koordinaatistossa, 2D:

$$V(x,y) = [A\sin(kx) + B\cos(kx)][Ce^{ky} + De^{-ky}] \tag{19}$$

$$V(x,y) = [Ee^{kx} + Fe^{-kx}][G\sin(ky) + H\cos(ky)] \tag{20}$$

Sinifunktioiden ortogonaaliusrelaatio

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{a}{2}\delta_{mn}. \tag{21}$$

Fourierin sinisarja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \tag{22}$$

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \tag{23}$$

VI luento, 20.1.

Laplacen operaattori pallossa

$$V(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right] \tag{24}$$

Legendren differentiaaliyhtälö

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right) + n(n+1)P_n(\cos\theta) = 0 \tag{25}$$

Legendren polynomien generoiva yhtälö

$$(1 \mp 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n P_n(x)t^n \tag{26}$$

Legendren polynomien ortogonaalisuus

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1} \tag{27}$$

$$\int_0^{\pi} P_m(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1} \tag{28}$$

Kätevä Legendre-kaava

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r_>} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n P_n(\cos\gamma),\ \gamma = \angle(\vec{r}_<, \vec{r}_>) \tag{29}$$

Binomikehitelmä

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)\epsilon^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)\epsilon^3}{3!} + \ldots,\ n \in \mathbb{Z}_+ \text{ tai } \epsilon < 1 \tag{30}$$

Kosinilause

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,\ \alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \tag{31}$$

IX luento, 1.2.

Roottorin roottori

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \nabla^2\vec{v} \tag{32}$$

Tulon derivointi, osa II

$$\nabla\times(\vec{v}\psi) = (\nabla\times\vec{v})\psi + \nabla(\psi)\times\vec{v} \tag{33}$$

$$= \psi\nabla\times\vec{v} - \vec{v}\times\nabla\psi \tag{34}$$

XII luento, 10.2.

Tulon derivointi, osa III...

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) + \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}). \tag{35}$$