MS-A0504 Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi

5A Bayesläinen tilastollinen päättely

Jukka Kohonen

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Perustieteiden korkeakoulu
Aalto-yliopisto

Lukuvuosi 2022–2023
Periodi IV

Sisältö

Tietämyksen kvantifiointi ja subjektiivinen todennäköisyys

Tietämyksen päivittäminen – Diskreetti data, diskreetti parametri

Diskreetti data, jatkuva parametri

Posteriorin laskenta käytännössä

Jatkuva data, jatkuva parametri

Bayes-inferenssin etuja

Esimerkki: Kolikko

Tasaiseksi väitettyä kolikkoa heitettiin 5 kertaa. Saatiin tulossarja ($0 =$ klaava, $1 =$ kruuna)

$$\vec{x} = (0, 0, 0, 0, 0)$$

Aineisto on pieni. Keskeinen raja-arvolause ei sovellu.

Vaikka aineisto on pieni, vaikuttaa $\hat{p} = 0$ kertovan kolikosta ainakin jotain. Mitä aineiston perusteella pitäisi päätellä ja tehdä?

- Uskotaan nyt varmasti, että $p = 0$? (Ei viisasta.)
- Hankitaan lisää dataa? (Voi olla mahdotonta.)
- Jätetään kokeen tulos huomiotta (ja uskotaan edelleen, että kolikko on tasainen?)
  Onhan totta, että tasaisesta kolikosta *voidaan* saada tämä tulossarja (todennäköisyydellä ...)
- Yritetään yhdistää kokeen tulos aiempaan tietämykseen kruunan odotetusta esiintyvyydestä?
  Tällöin pitää kvantifioida termi *tietämys* ja selvittää säännöt, *miten* näitä sovitetaan toisiinsa.

Tietämyksen mallintaminen

- Kiinnostuksen kohteena on jokin tuntematon suure, esimerkiksi datalähteen jakauman parametri θ.
- Jos suureen arvosta on *jotakin* käsitystä, tämä kuvataan todennäköisyysjakaumalla.
- Suuretta kuvataan tällöin *satunnaismuuttujalla* Θ.
- "Satunnaisuus" on tässä ymmärrettävä laajemmin *epävarmuutena*, "voi olla että Θ on ..."
- Esim. $\mathbb{P}(a \leq \Theta \leq b) = 95\%$ tarkoittaa, että käytettävissä olevan informaation nojalla suureen arvon katsotaan olevan välillä $[a, b]$ todennäköisyydellä 95%.

Informaation lähteenä esim.

- symmetriaoletukset tai -havainnot (kolikon rakenne)
- prosessin tuntemus (kolikonheiton mekaniikka)
- havainnot ja kokemus (heittotilastot)

Frekventistinen ja bayesläinen tilastotiede

Frekventistinen tilastotiede liittää todennäköisyydet ilmiöihin, jotka syntyvät jonkinlaisesta satunnaisesta *prosessista* (yleensä toistettavasti).

Esim. kolikonheittoprosessin *tulokset* X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 ja niistä lasketut *tunnusluvut* kuten $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)/5$.

Bayesläinen tilastotiede laajentaa todennäköisyyden käsitteen myös muihin suureisiin, joiden *arvo on tuntematon*, vaikka ne eivät olisi perinteisesti ajatellen “satunnaisia” tai toistettavia.

Esim. kolikonheittoprosessia kuvaava *parametri* p.

(Nimi “bayesläinen” tulee siitä, että tässä käytetään paljon Bayesin kaavaa.)

Frekventistinen ja Bayesläinen tulkinta — Otantatutkimus

Puoluetta A kannattaa osuus p populaatiosta.

- **(F)** p on tuntematon, mutta silti eräs kiinteä luku eikä siihen liity satunnaisuutta. Emme liitä p:n arvoihin todennäköisyyttä.
- **(B)** p on tuntematon suure, käsittelemme sitä satunnaismuuttujana ja liitämme sen arvoihin todennäköisyyksiä.

Valitaan satunnaiset 1000 ihmistä. Heistä k kpl kannattaa A:ta.

- **(F&B)** k on satunnaismuuttuja, jonka jakauma riippuu p:stä. (Bayes-tulkinnassa *ehdollinen jakauma*)

Molemmissa käytetään matemaattisesti täysin samaa todennäköisyyslaskentaa. Ero on siinä, mihin muuttujiin sitä sovelletaan.

Frekventistinen ja Bayesläinen tulkinta — Kolikonheitto

Eräs kolikko tuottaa kruunia todennäköisyydellä p.

- **(F)** p on tuntematon, mutta silti eräs kiinteä luku eikä siihen liity satunnaisuutta. Emme liitä p:n arvoihin todennäköisyyttä.
- **(B)** p on tuntematon suure, käsittelemme sitä satunnaismuuttujana ja liitämme sen arvoihin todennäköisyyksiä.

Heitetään kolikkoa 5 kertaa ja saadaan k kruunaa.

- **(F&B)** k on satunnaismuuttuja, jonka jakauma riippuu p:stä. (Bayes-tulkinnassa *ehdollinen jakauma*)

Molemmissa käytetään matemaattisesti täysin samaa todennäköisyyslaskentaa. Ero on siinä, mihin muuttujiin sitä sovelletaan.

Sisältö

Esimerkki: Kolikko pussista

Pussissa on 10 erilaista kolikkoa: kuusi reilua (kruunan tn $\theta = 0.5$), kaksi vinoa ($\theta = 0.25$ ja 0.75) ja kaksi täysin huijauskolikkoa ($\theta = 0$ ja 1). Pussista poimitaan satunnainen kolikko. Sen tyypin Θ jakauma on:

θ	0	0.25	0.5	0.75	1
$\mathbb{P}(\Theta = \theta)$	0.1	0.1	0.6	0.1	0.1

Esim. alaspäin vino kolikko ($\theta = 0.25$) tulee valituksi tn:llä 0.1.

Valittua kolikkoa heitettäessä havaitaan klaava.
Mikä on tn, että kyseinen kolikko on alaspäin vino?
Osituskaavasta

$$\mathbb{P}(\text{klaava}) \;=\; (0.1 \cdot 1) + (0.1 \cdot 0.75) + (0.6 \cdot 0.5) + (0.1 \cdot 0.25) + (0 \cdot 1) \;=\; 0.5$$

Bayesin kaavasta

$$\mathbb{P}(\Theta = 0.25 \,|\, \text{klaava}) \;=\; \frac{\mathbb{P}(\Theta = 0.25) \cdot \mathbb{P}(\text{klaava} \,|\, \Theta = 0.25)}{\mathbb{P}(\text{klaava})} \;=\; \frac{0.1 \cdot 0.75}{0.5} \;=\; 0.15$$

Kolikko pussista jatkuu

Heitimme kolikkoa kerran ja saimme klaavan.

Voimme nyt laskea kullekin kolikkotyypille todennäköisyyden, että kädessämme oleva kolikko on kyseistä tyyppiä. (Samat laskut kuin edellä, jokaiselle θ:n arvolle erikseen.)

θ	0	0.25	0.5	0.75	1
$\mathbb{P}(\Theta = \theta \,\vert\, \text{klaava})$	0.20	0.15	0.60	0.05	0.00

Tämä on kolikkotyypin posteriorijakauma yhden havainnon jälkeen.

Miten yhden klaavan havaitseminen vaikutti todennäköisyyksiin?

- Klaavoja helposti tuottavien tyyppien tn *kasvoi*.
- Klaavoja harvoin tuottavien tyyppien tn *pieneni*.
- Tyypin $\Theta = 1$ tn pieneni peräti nollaan. Tämä on järkevää: havaitsimme klaavan, kolikko ei siis tuota pelkkiä kruunia.

Tyypilliset lyhennysmerkinnät

Pitkä merkintä	Lyhennys	Selitys
$f_X(x)$	$f(x)$	X:n tiheys
$f_\Theta(\theta)$	$f(\theta)$	Θ:n tiheys ("priori")
$f_{X\mid\Theta}(x \mid \theta)$	$f(x \mid \theta)$	X:n tiheys, jos $\Theta = \theta$ ("uskottavuus")
$f_{\Theta\mid X}(\theta \mid x)$	$f(\theta \mid x)$	Θ:n tiheys, jos $X = x$ ("posteriori")

Pitkässä merkinnässä alaindeksi selventää, mistä satunnaismuuttujista puhutaan.

Lyhennysmerkinnässä alaindeksi jätetään pois, joten f voi viitata useisiin *eri* funktioihin. Mihin funktioon, pitää yleensä ymmärtää argumentista sulkujen sisällä.

Tarvittaessa selvennetään alaindeksillä. (Tarkoittaako $f(5 \mid 3)$ funktiota $f_{X\mid\Theta}$ vai $f_{\Theta\mid X}$? Nämä ovat aivan eri funktiot.)

(Luentomonisteessa käytetään f:ää datan tiheysfunktioille ja p:tä parametrin tiheysfunktioille.)

Tietämyksen päivityskaava: Diskreetti malli

Tietämys Θ:n arvosta ennen datan havaitsemista:

- Priorijakauma $f(\theta) \;=\; \mathbb{P}(\Theta = \theta)$

Tietämys Θ:n arvosta datan $X = x$ havaitsemisen jälkeen:

- Posteriorijakauma $f(\theta \,|\, x) \;=\; \mathbb{P}(\Theta = \theta \,|\, X = x)$

Datalähteen stokastinen malli:

- Uskottavuusfunktio $f(x \,|\, \theta) \;=\; \mathbb{P}(X = x \,|\, \Theta = \theta)$

Fakta

Posteriorijakauma saadaan laskemalla pisteittäin (= kullekin mahdolliselle arvolle θ) priorin ja uskottavuuden tulo, ja lopuksi normittamalla niin että summa on 1:

$$f(\theta \,|\, x) \;=\; \frac{f(\theta)\, f(x \,|\, \theta)}{\sum_{\theta'} f(\theta')\, f(x \,|\, \theta')}.$$

Tietämyksen päivityskaava: Todistus

Osituskaavasta

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = x) &= \sum_{\theta'} \mathbb{P}(\Theta = \theta')\,\mathbb{P}(X = x \,|\, \Theta = \theta') \\ &= \sum_{\theta'} f(\theta')\, f(x \,|\, \theta'),\end{aligned}$$

joten Bayesin kaavasta

$$\begin{aligned}f(\theta \,|\, x) &= \mathbb{P}(\Theta = \theta \,|\, X = x) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\Theta = \theta)\mathbb{P}(X = x \,|\, \Theta = \theta)}{\mathbb{P}(X = x)} \\ &= \frac{f(\theta) f(x \,|\, \theta)}{\mathbb{P}(X = x)} \\ &= \frac{f(\theta) f(x \,|\, \theta)}{\sum_{\theta'} f(\theta')\, f(x \,|\, \theta')}.\end{aligned}$$

Esimerkki: kolikko pussista – Laskenta Bayes-laatikolla

Tuntematon parametri: Heitetyn kolikon tyyppi Θ

Priorijakauma $f(\theta) = \mathbb{P}(\Theta = \theta)$

Data $x = 0$ (havaittiin klaava)

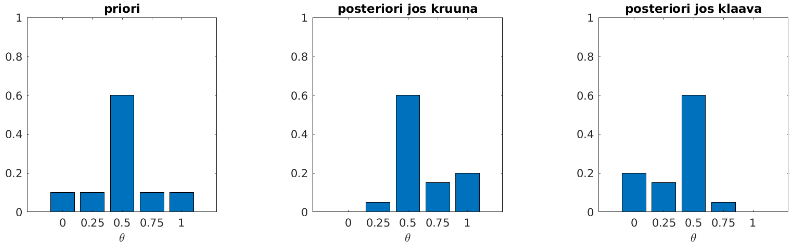
Uskottavuus $f(x \mid \theta) = \mathbb{P}(X = x \mid \Theta = \theta)$

θ	Priori $f(\theta)$	Uskottavuus $f(0 \mid \theta)$	Tulo	Posteriori $f(\theta \mid 0)$
0	0.1	1.00	0.100	0.20
0.25	0.1	0.75	0.075	0.15
0.5	0.6	0.50	0.300	0.60
0.75	0.1	0.25	0.025	0.05
1	0.1	0.00	0.000	0.00
summa	1.0		0.500	1.00

"Tulo" = priorin ja uskottavuuden tulo eli ns. *normittamaton* posteriorijakauma. Kun se vielä normitetaan (niin että summautuu ykköseksi), saadaan posteriorijakauma.

Huom. Uskottavuusfunktion arvot eivät keskenään muodosta mitään todennäköisyysjakaumaa.

Kolikon tyypin priori- ja posteriorijakaumat



Kolikko pussista: Monta havaintoa

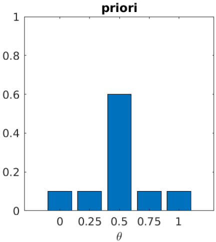
Pussissa on 10 kolikkoa kuten edellä. Valitaan yksi kolikko satunnaisesti, heitetään sitä kaksi kertaa. Havaitaan 2 klaavaa.
Millä tn heitetty kolikko oli tasainen?
Uskottavuusfunktio datajoukolle $(x_1, x_2) = (0, 0)$ on:

θ	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(0,0 \mid \theta)$	1.0000	0.5625	0.2500	0.0625	0.0000

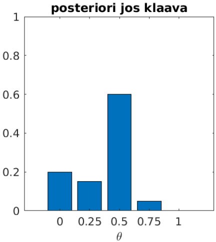
θ	Priori $f(\theta)$	Uskottavuus $f(0,0 \mid \theta)$	Tulo	Posteriori $f(\theta \mid 0,0)$
0	0.1	1.0000	0.1000	0.32
0.25	0.1	0.5625	0.0563	0.18
0.5	0.6	0.2500	0.1500	0.48
0.75	0.1	0.0625	0.0063	0.02
1	0.1	0.0000	0.0000	0.00
summa	1.0		0.3125	1.00

"Tulo" = priorin ja uskottavuuden tulo eli ns. *normittamaton* posteriorijakauma. Kun se vielä normitetaan (niin että summautuu ykköseksi), saadaan posteriorijakauma.

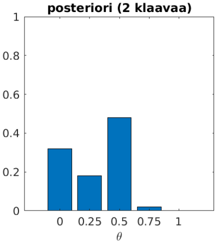
Kolikon priori ja erilaisia posterioreja



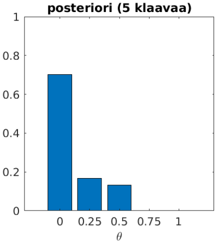
$f(\theta)$



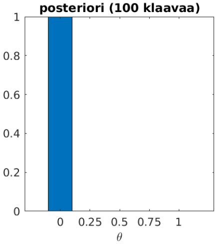
$f(\theta \,|\, 0)$



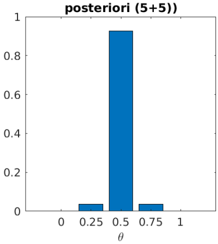
$f(\theta \,|\, 00)$



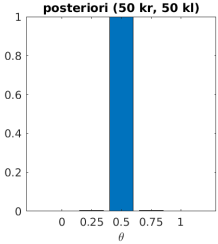
$f(\theta \,|\, 00000)$



$f(\theta \,|\, 0000\ldots)$



$f(\theta \,|\, 0000011111)$



$f(\theta \,|\, 00\ldots11\ldots)$

Vaihtoehto: Tietämyksen päivittäminen 2 vaiheessa

Tietämys Θ:n arvosta ennen datan havaitsemista:

- Priorijakauma $f(\theta) \;=\; \mathbb{P}(\Theta = \theta)$

Tietämys Θ:n arvosta datan havaitsemisen jälkeen:

- Posteriorijakauma $f(\theta \,|\, x_1) \;=\; \mathbb{P}(\Theta = \theta \,|\, X_1 = x_1)$.
- Posteriorijakauma $f(\theta \,|\, x_1, x_2) \;=\; \mathbb{P}(\Theta = \theta \,|\, X_1 = x_1, X_2 = x_2)$.

Datalähteen stokastinen malli:

- Uskottavuusfunktio $f(x_1 \,|\, \theta) \;=\; \mathbb{P}(X_1 = x_1 \,|\, \Theta = \theta)$
- Uskottavuusfunktio $f(x_2 \,|\, \theta, x_1) \;=\; \mathbb{P}(X_2 = x_2 \,|\, \Theta = \theta, X_1 = x_1)$

Fakta

Posteriorijakauma $f(\theta \,|\, x_2)$ saadaan posteriorijakaumasta $f(\theta \,|\, x_1)$ painottamalla sitä uskottavuudella $f(x_2 \,|\, \theta, x_1)$ ja normittamalla:

$$f(\theta \,|\, x_1, x_2) \;=\; \frac{f(\theta \,|\, x_1)\, f(x_2 \,|\, \theta, x_1)}{\sum_{\theta'} f(\theta' \,|\, x_1)\, f(x_2 \,|\, \theta', x_1)}.$$

Tietämyksen 2-vaiheinen päivityskaava: Todistus

Kun $D_1 = \{X_1 = x_1\}$ ja $D_2 = \{X_2 = x_2\}$, saadaan tulokaavasta

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Theta = \theta, D_1, D_2) &= \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(\Theta = \theta \,|\, D_1)\mathbb{P}(D_2 \,|\, \Theta = \theta, D_1) \\ &= \mathbb{P}(D_1)\, f(\theta \,|\, x_1)\, f(x_2 \,|\, \theta, x_1), \end{aligned}$$

osituskaavasta (ehdoton)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_1, D_2) &= \sum_{\theta'} \mathbb{P}(\Theta = \theta', D_1, D_2) \\ &= \sum_{\theta'} \mathbb{P}(D_1)\, f(\theta' \,|\, x_1)\, f(x_2 \,|\, \theta', x_1), \end{aligned}$$

ja nämä yhdistämällä

$$\begin{aligned} f(\theta \,|\, x_1, x_2) &= \frac{\mathbb{P}(\Theta = \theta, X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(D_1)\, f(\theta \,|\, x_1)\, f(x_2 \,|\, \theta, x_1)}{\sum_{\theta'} \mathbb{P}(D_1)\, f(\theta' \,|\, x_1)\, f(x_2 \,|\, \theta', x_1)} \\ &= \frac{f(\theta \,|\, x_1)\, f(x_2 \,|\, \theta, x_1)}{\sum_{\theta'} f(\theta' \,|\, x_1)\, f(x_2 \,|\, \theta', x_1)}. \end{aligned}$$

Tietämyksen päivitys: Yhteenveto

- Priorijakauma $f(\theta)$ mallintaa tietämystä tuntemattoman parametrin arvosta Θ ennen havaintoja
- Uskottavuusfunktio $f(x \mid \theta)$ vastaa datalähteen stokastista mallia
- Posteriorijakauma mallintaa tietämystä, johon on yhdistetty priorijakauma sekä havaittu data
- Posteriorijakauma $f(\theta \mid x)$ lasketaan kertomalla pisteittäin (= kullekin θ erikseen) priori ja uskottavuus, ja lopuksi normittamalla aidoksi tn-jakaumaksi (niin että summa=1)
- Tätä kutsutaan Bayes-päättelyksi (Bayes-inferenssiksi).

Sisältö

Tuntematon kolikko

Tuntematonta kolikkoa heitettäessä (0=klaava, 1=kruuna) on havaittu data $\vec{x} = (0,0,0,0,0,0,1,0,1,0)$. Kolikosta ei ole mitään taustatietoja. Määritä parametrin Θ (kruunan tn) posteriorijakauma.

Valitaan prioriksi jatkuvan välin $[0,1]$ tasajakauma tiheysfunktiona

$$f(\theta) \;=\; \begin{cases} 1, & \theta \in [0,1], \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

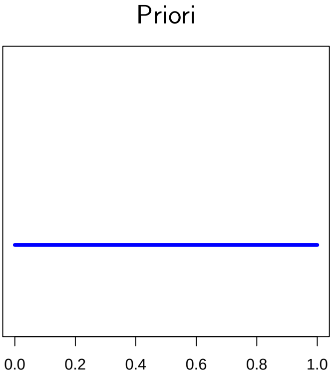
Uskottavuusfunktio $f(\vec{x}\,|\,\theta) \;=\; \theta^2(1-\theta)^8$
Posteriorijakauman tiheysfunktio

$$f(\theta\,|\,\vec{x}) \;=\; c\,f(\theta)f(\vec{x}\,|\,\theta) \;=\; \begin{cases} c\,\theta^2(1-\theta)^8, & \theta \in [0,1], \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

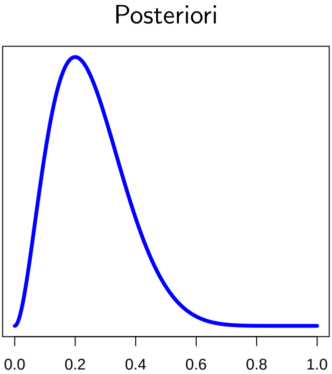
missä normitusvakio $c = (\int_0^1 t^2(1-t)^8\,dt)^{-1}$

Tuntematon kolikko

Data: $\vec{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$



$$f(\theta)\, d\theta = 1\, d\theta$$



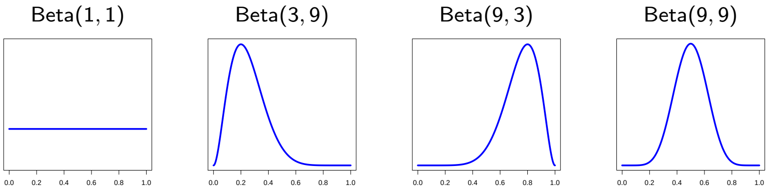
$$f(\theta|\vec{x}) d\theta = c\, \theta^2 (1-\theta)^8\, d\theta$$

Beetajakauma

Beta(a, b)-jakauman parametreina $a > 0$ ja $b > 0$ tiheysfunktio on

$$f(\theta) \; = \; \begin{cases} c\,\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}, & \text{kun } \theta \in [0,1], \\ 0, & \text{muuten}, \end{cases}$$

normitusvakiona $c \; = \; \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!}$.



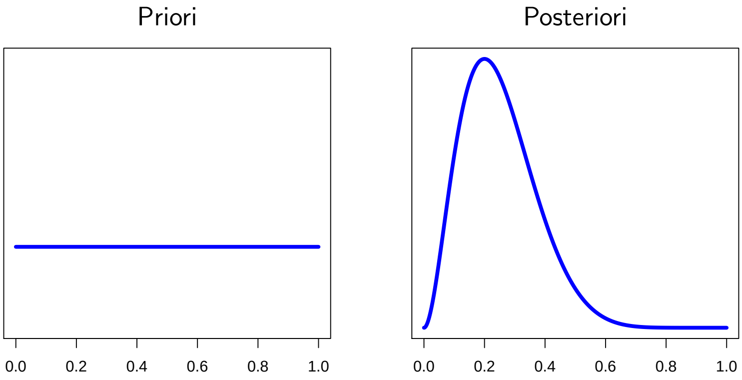
- Arvojoukko $= [0, 1]$
- Odotusarvo $\mu = \frac{a}{a+b}$ ja keskihajonta $\sigma = \sqrt{\frac{\mu(1-\mu)}{a+b+1}}$

`dbeta(theta,a,b); pbeta(theta,a,b)`

Tuntematon kolikko

Data: $\vec{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$

Priori: Tasajakauma Beta$(1, 1)$
Posteriori: Beta$(3, 9)$



$f(\theta)\, d\theta = 1\, d\theta$

$f(\theta|x) d\theta = c\, \theta^2 (1-\theta)^8\, d\theta$

Vaihtoehto: Datana lukumäärä eikä yksittäiset heitot

Kolikkoa n kertaa heitettäessä havaittiin x kruunaa. Kolikosta ei ole taustatietoja. Määritä parametrin Θ (kruunan tn) posteriorijakauma.

Priorijakauman tiheysfunktio: $f(\theta) = 1$, $\theta \in [0, 1]$
Uskottavuusfunktio datapisteelle x saadaan $\mathrm{Bin}(n, \theta)$-jakaumasta

$$f(x \,|\, \theta) \;=\; \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

Posterioritiheys

$$f(\theta \,|\, x) \;=\; \frac{f(\theta) f(x \,|\, \theta)}{\int f(t) f(x \,|\, \theta')\, d\theta'} \;=\; c\, \theta^x (1-\theta)^y$$

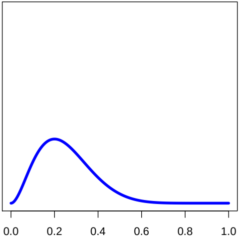
on $\mathrm{Beta}(x+1, y+1)$, missä $y = n - x$ on klaavojen lkm.

Huom

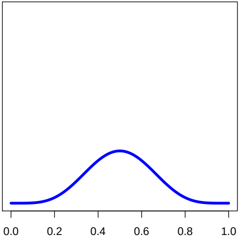
- Kun $n = 10$ ja $k = 2$, saadaan sama posteriori $\mathrm{Beta}(3, 9)$, mitä yksityiskohtaiselle datalle $\vec{x} = (0,0,0,0,0,0,1,0,1,0)$.
- Normitusvakion c arvo määräytyy ehdosta $\int_0^1 f(\theta \,|\, x) d\theta = 1$.
  Beta-jakauman taulukoista $\implies c = \frac{(x+y+1)!}{x!y!}$

Tuntematon kolikko: Kruunien lukumäärä

$n = 10$

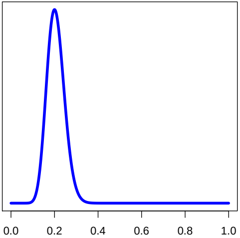


$\text{Beta}(3, 9)$: $x = 2$, $y = 8$

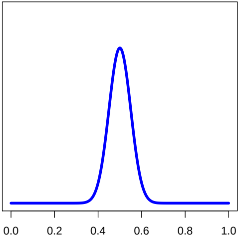


$\text{Beta}(6, 6)$: $x = 5$, $y = 5$

$n = 100$



$\text{Beta}(21, 81)$: $x = 20$, $y = 80$



$\text{Beta}(51, 51)$: $x = 50$, $y = 50$

Sisältö

Tietämyksen kvantifiointi ja subjektiivinen todennäköisyys

Tietämyksen päivittäminen – Diskreetti data, diskreetti parametri

Diskreetti data, jatkuva parametri

Posteriorin laskenta käytännössä

Jatkuva data, jatkuva parametri

Bayes-inferenssin etuja

Posteriorin laskenta käytännössä

Jokaiselle θ-parametrin mahdolliselle arvolle,

$$\text{posteriori} = \frac{\text{priori} \cdot \text{uskottavuus}}{\text{normalisointivakio}}$$

eli

$$f(\theta \,|\, x) = \frac{f(\theta) \cdot f(x \,|\, \theta)}{\ldots}$$

missä ... on vakio (ei θ:sta riippuva) jolla saadaan aikaan $\sum_\theta f(\theta \,|\, x) = 1$.

Usein helpointa: Lasketaan ensin *normalisoimaton posteriori*

$$f(\theta) \cdot f(x \,|\, \theta).$$

- Se ei ole tn-jakauma, mutta ...
- siitä jo näkee *suhteelliset* erot,
- maksimikohdan voi etsiä yhtä hyvin ilman normalisointia,
- ja sen voi sitten normalisoida.

Posteriorin normalisointi

Normalisoimaton posteriori

$$f(\theta) \cdot f(x \mid \theta)$$

on *melkein* tn-jakauma Θ:lle, paitsi että sen summa

$$c = \sum_{\theta} \Big(f(\theta) \cdot f(x \mid \theta) \Big)$$

voi olla $\neq 1$. Jaetaan kaikki arvot c:llä $\Rightarrow$ saadaan aito tn-jakauma, nimittäin Θ:n posteriorijakauma.

Jos Θ on jatkuva, summan tilalla on integraali.

Kolikko pussista (diskreetti parametri)

Parametri Θ kuvaa millainen kolikko on poimittu

Priori $f(\theta) = \mathbb{P}(\Theta = \theta)$

Data $x = 0$ (yksi klaava)

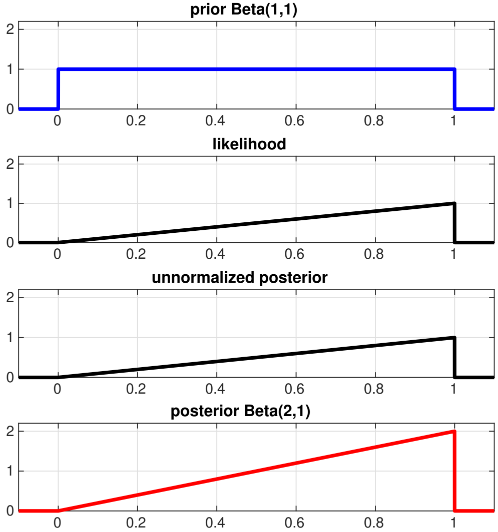
Uskottavuus $f(0 \,|\, \theta) = \mathbb{P}(X = 0 \,|\, \Theta = \theta) = 1 - \theta$

θ	Priori $f(\theta)$	Uskottavuus $f(0 \,\vert\, \theta)$	Tulo	Posteriori $f(\theta \,\vert\, 0)$
0	0.1	1.00	0.100	0.20
0.25	0.1	0.75	0.075	0.15
0.5	0.6	0.50	0.300	0.60
0.75	0.1	0.25	0.025	0.05
1	0.1	0.00	0.000	0.00
$\sum$	1.0		0.500	1.00

Jo normalisoimattomasta posteriorista ("tulo") nähdään mitkä parametrin arvot ovat toisia todennäköisempiä. other).

Aito posteriori saadaan jakamalla kukin tulon arvo niiden summalla (tässä 0.5).

Kolikko, jatkuva parametri — tasapriori, eka tulos 1



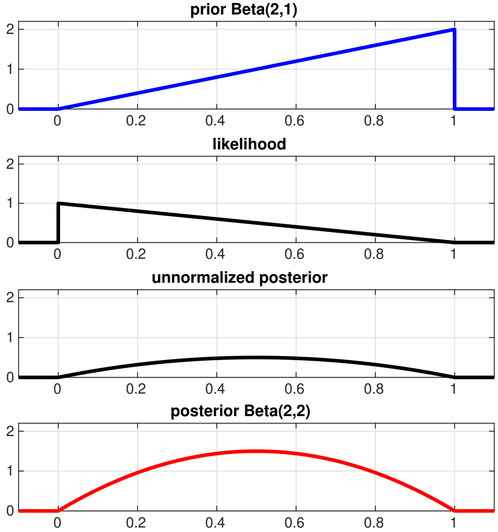
$$1$$

$$\theta$$

$$\theta$$

$$2\theta$$

Seuraava päivitys, kun toinen tulos 0



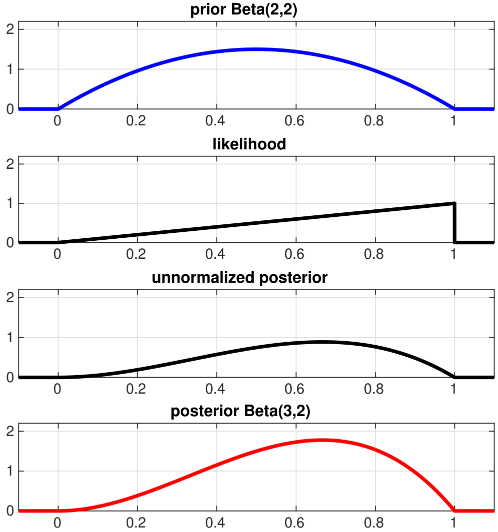
$$2\theta$$

$$(1-\theta)$$

$$2\theta(1-\theta)$$

$$6\theta(1-\theta)$$

Seuraava päivitys, kun kolmas tulos 1



$$6\theta(1-\theta)$$

$$\theta$$

$$6\theta^2(1-\theta)$$

$$12\theta^2(1-\theta)$$

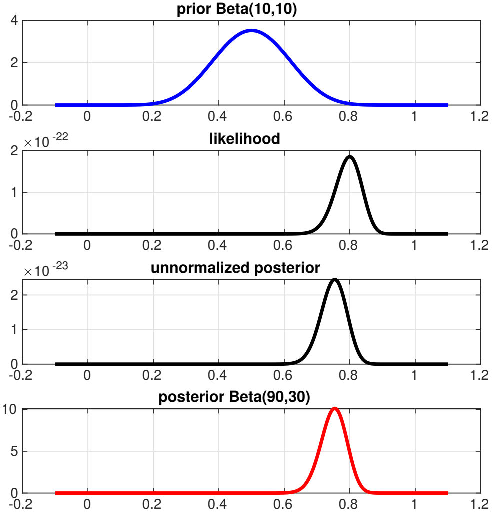
Entäs priori?

Tasapriori Beta(1,1) sanoi, että (ennen havaintoja) pidimme kaikkia parametriarvoja välillä $[0, 1]$ yhtä todennäköisinä. Tämä on eräässä mielessä "tuntematon kolikko".
Mutta reaalimaailmassa vastaantulevista kolikoista ehkä pidämme jo *a priori* todennäköisenä, että ne ovat (suunnilleen) reiluja.
Entä jos otamme prioriksi esim. Beta(10,10), joka on symmetrinen, mutta keskittyy enemmän keskikohtaan?

(Matemaattisesti tähän päädytään, jos kolikon priori oli alun perin tasainen, mutta olemme sitten nähneet 9 kruunaa ja 9 klaavaa.)

Kokeillaan. Aloitetaan symmetrisellä "luultavasti lähellä reilua" uskomuksella, ja sitten havaitaan 80 kruunaa ja 20 klaavaa.

Priori “lähellä reilua”, epäsymmetrinen (80+20)



$$\propto \theta^9(1-\theta)^9$$

$$\propto \theta^{80}(1-\theta)^{20}$$

$$\propto \theta^{89}(1-\theta)^{29}$$

$$\propto \theta^{89}(1-\theta)^{29}$$

Sisältö

Esim. Kohinainen mittaus

- Tähdellä (A) on todellinen kirkkaus θ
- Astronomin (B) mittaama kirkkaus on normaalijakautunut odotusarvona θ ja keskihajontana $\sigma = 2$.

A lähettää valoa jatkuvasti samalla kirkkaudella. B tekee kolme mittausta riippumattomin virhein, havaiten arvot $\vec{x} = (3, 8, 7)$.

- Todellisen kirkkauden arvon SU-estimaatti on mitattujen arvojen keskiarvo $m(\vec{x}) = (3 + 8 + 7)/3 = 6$

Astronomi B arvelee ennalta, että kirkkauden Θ arvo on normaalijakautunut odotusarvona $\mu_0 = 5$ ja keskihajontana $\sigma_0 = 1$.

Bayesläinen normaalimalli

Tuntemattoman parametrin priorijakauma: $\Theta \sim \mathrm{Nor}(\mu_0, \sigma_0)$,

$$f(\theta) = (2\pi\sigma_0^2)^{-1/2} e^{-\frac{(\theta-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}$$

Datan uskottavuusfunktio: $(X_i \mid \theta) \sim \mathrm{Nor}(\theta, \sigma)$,

$$\begin{aligned} f(x_i \mid \theta) &= (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}} \\ f(x_1, \dots, x_n \mid \theta) &= f(x_1 \mid \theta) \cdots f(x_n \mid \theta) \end{aligned}$$

Esim. Kohinainen mittaus:

- Kirkkauden priori: $\Theta \sim \mathrm{Nor}(\mu_0, \sigma_0)$, $\mu_0 = 5$, $\sigma_0 = 1$
- Mitattu kirkkaus: $(X_i \mid \theta) \sim \mathrm{Nor}(\theta, \sigma)$, $\sigma = 2$

Bayesläisen normaalimallin posteriorijakauma

Priorijakauma $\Theta \sim \mathrm{Nor}(\mu_0, \sigma_0)$
Uskottavuus: $(X_i \,|\, \theta) \sim \mathrm{Nor}(\theta, \sigma)$

Fakta

Bayeslaisen normaalimallin posteriorijakauma havaitun datajoukon $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ suhteen on normaalijakauma $\mathrm{Nor}(\mu_1, \sigma_1)$*, missä*

$$\mu_1 = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\mu_0 + \frac{n}{\sigma^2} m(\vec{x})}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}, \qquad \sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}},$$

ja $m(\vec{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ *on havaitun datajoukon keskiarvo.*

Esim. Kohinainen mitttaus

Astronomin B mittaama kirkkaus on normaalijakautunut odotusarvona θ ja keskihajontana $\sigma = 2$.
B:n aiempi arvio on, että kirkkaus Θ on normaalijakautunut odotusarvona $\mu_0 = 5$ ja keskihajontana $\sigma_0 = 1$.

Kirkkauden posteriorijakauma vastaanotettujen arvojen $\vec{x} = (3, 8, 7)$ suhteen on $\text{Nor}(\mu_1, \sigma_1)$, missä

$$\mu_1 = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\mu_0 + \frac{n}{\sigma^2} m(\vec{x})}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} = \frac{\frac{1}{1^2} \times 5 + \frac{3}{2^2} \times 6}{\frac{1}{1^2} + \frac{3}{2^2}} \approx 5.43$$

ja

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{3}{2^2}}} \approx 0.756$$

Kohinainen mittaus: Piste- ja väliestimaatit

Kirkkauden posteriorijakauma datan $\vec{x} = (3, 8, 7)$ suhteen on $\mathrm{Nor}(\mu_1, \sigma_1)$, missä $\mu_1 = 5.43$ ja $\sigma_1 = 0.756$.
Kirkkauden bayesläisiä piste-estimaatteja:

- Posteriorijakauman odotusarvo: $\mu_1 = 5.43$
- Suurimman posterioritodennäköisyyden estimaatti: $\mu_1 = 5.43$

Määritä väli, joka sisältää todellisen kirkkauden 90% todennäköisyydellä. Ratkaistaan c yhtälöstä

$$0.90 \; = \; \mathbb{P}(\Theta = \mu_1 \pm c) \; = \; \mathbb{P}\left(\frac{\Theta - \mu_1}{\sigma_1} = 0 \pm c/\sigma_1\right) \; = \; \mathbb{P}(|Z| \leq c/\sigma_1)$$

Taulukoista: $\mathbb{P}(|Z| \leq 1.64) = 0.90$, joten $c = 1.64 \times 0.756 = 1.24$.
Väli $5.43 \pm 1.24 = [4.19, 6.67]$ siis sisältää oikean arvon 90% todennäköisyydellä. (Piirrä posteriorijakauman kuva ja vertaa priorijakaumaan)

Sisältö

Joitakin Bayes-inferenssin etuja

Kun parametria Θ käsitellään satunnaismuuttujana, niin saadaan:

- **Matemaattinen yhtenäisyys.** "Parameterit" and "havainnot" ovat kaikki "suureita", joihin sovelletaan samoja tn-laskennan laskusääntöjä.
- **Paljon sovelluksia.** Tällä menetelmällä voidaan laskea posterioreja
  - vähästä datasta, jopa $n = 1$, jolloin esim. normaaliapproksimaatiota ei voi ollenkaan käyttää
  - paljosta datasta
  - ei-normaalista datasta (esim. eksponenttijakautuneet havainnot)
  - kun parametrista on käytettävissä hyödyllistä ennakkotietoa
  - monimutkaisilla malleilla, joilla voi kuvata monimutkaisia reaalimaailman ilmiöitä
- **Aito tn-jakauma.**. Inferenssin tuloksena on Θ:lle tn-jakauma. Se kertoo Θ:sta paljon enemmän kuin yksittäinen piste- tai väliestimaatti. Jakaumaa voi tarkastella visuaalisesti ja siitä voi laskea mitä tahansa tunnuslukuja (esim. odotusarvo, moodi, minkä tahansa välin todennäköisyys).

Seuraavalla luennolla tutkitaan tarkemmin, mitä posteriorijakaumalla voi tehdä, mm. lasketaan väliestimaatteja.