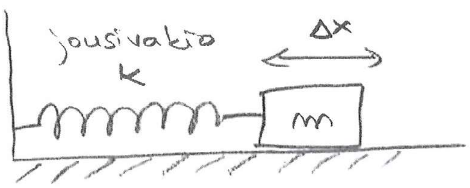
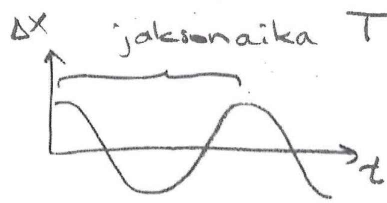
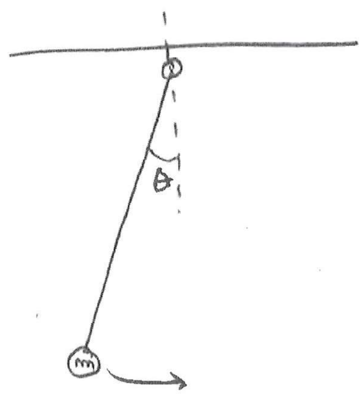
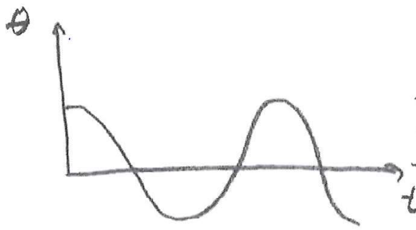
Jaksollinen liike



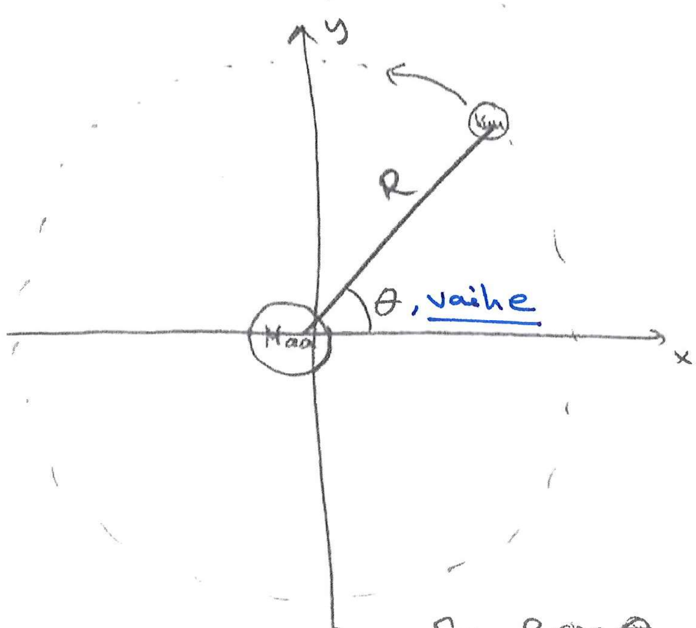


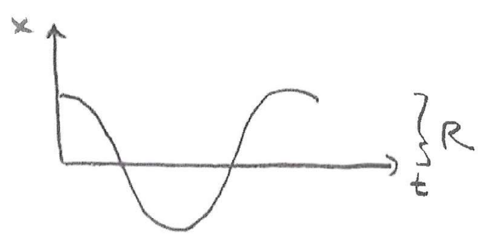
jaksonaika T; kertoo aikavälin jonka kuluessa värähdys toistuu

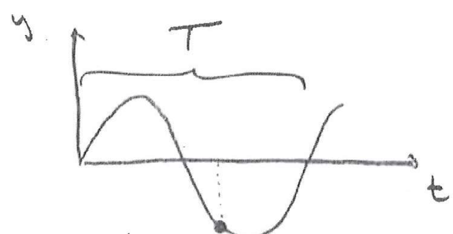




Amplitudi A; kertoo värähdyksen suuruuden







$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} ; \quad \theta = \omega t$$

vaihe $\varphi = \dfrac{2\pi t}{T}$

kertoo missä "vaiheessa" jaksoa värähdys ajanhetkellä t on.

Yleisesti harmooninen liike:

$$y = A \sin(\underbrace{\omega t + \varphi}_{\theta(t)})$$

φ: vaihe ajanhetkellä $t = 0$

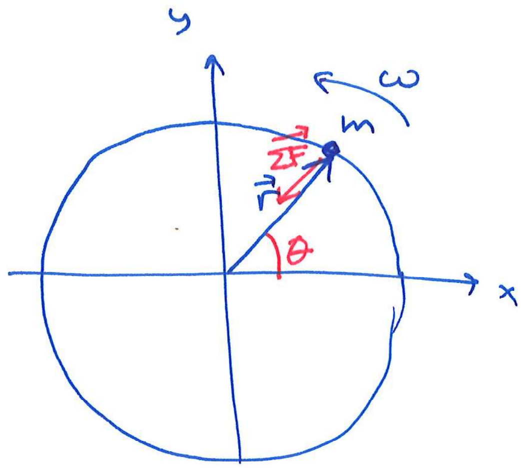
y: poikkeama

A: amplitudi

ω: vaiheen muutosnopeus, "kulmanopeus".

Huom! Vaihe on dimensioton!

Ympyräliikkeelle



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \cdot \frac{\overset{\overset{\omega r}{\shortparallel}}{v}^2}{r}(-\hat{r})$$

$$= mr\omega^2 (-\hat{r}).$$

Y-komponentti:

$$\sum F_y = mr\omega^2 (-\underbrace{\sin\theta}_{y/r})$$

$$= \underbrace{-m\omega^2 y}.$$

"jousivoima" vrt. Hooke.

$\Rightarrow$ harmoninen liike y-suunnassa.

(ja samaten x-suunnassa)

Kompleksiluvut

Reaalilukujen $\mathbb{R}$ laajennos kompleksilukuihin $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{ z : z = a + ib \ ; \ a, b \in \mathbb{R} \},$$

missä $i = \sqrt{-1}$ imaginääriyksikkö.

Laskutoimitukset

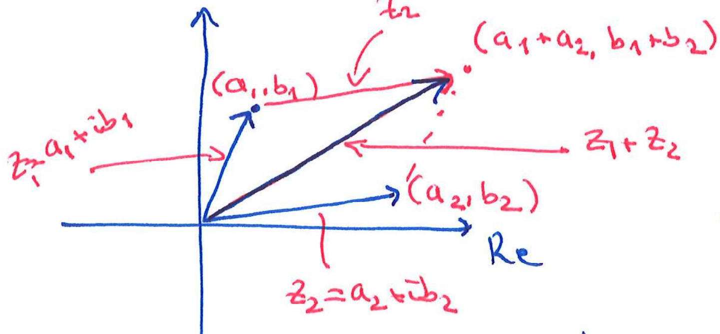
$$z_1 = a_1 + ib_1 \ , \ z_2 = a_2 + ib_2$$

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$ yhteen- ja vähennyslasku

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \\ &= a_1 a_2 + ib_1 a_2 + a_1 ib_2 + ib_1 \cdot ib_2 \\ &= a_1 a_2 + i(b_1 a_2 + a_1 b_2) + \underbrace{i^2}_{-1} \cdot b_1 b_2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2) \end{aligned}$$ tulo

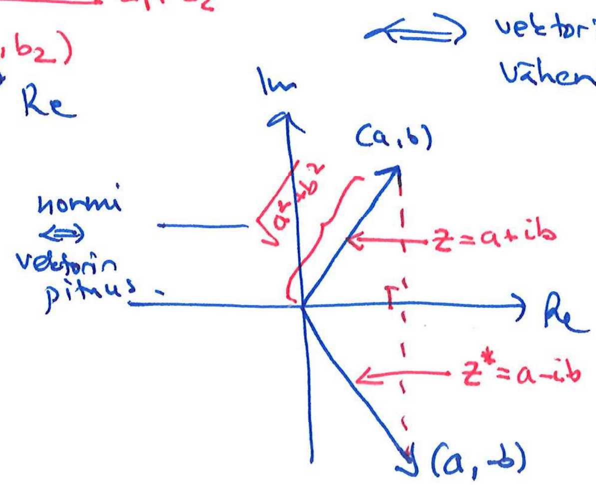
$$\bar{z} = z^* = (a + ib)^* = a - ib$$ kompleksikonjugaatti

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$ normi



kompleksilukujen yhteen- ja vähennyslasku

$\iff$ vektorien yhteen- ja vähennyslasku.

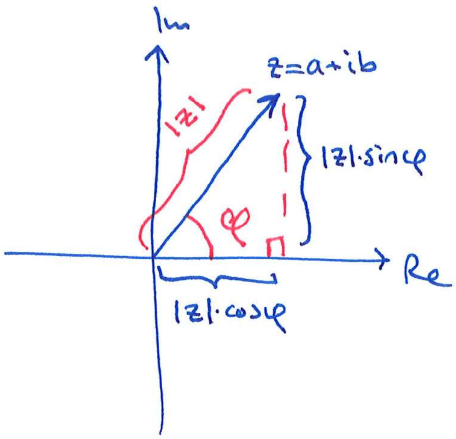


kompleksikonjugaatti

$\iff$

peilaus reaaliakselin suhteen.

Kompleksilukujen napakoordinaattiesitys



$$z = a+ib = |z|\cdot\cos\varphi + i|z|\cdot\sin\varphi$$

$$= |z|\underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{\text{Eulerin kaava } = e^{i\varphi}}$$

$$= \underbrace{|z|}_{\text{normi}}\cdot e^{i\varphi}$$

argumentti tai vaihe

Erityisesti: jos $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad x = |x|\cdot e^{i\varphi} \quad ; \quad \varphi = 0 \text{ jos } x>0$$
$$\varphi = \pi \text{ jos } x<0.$$

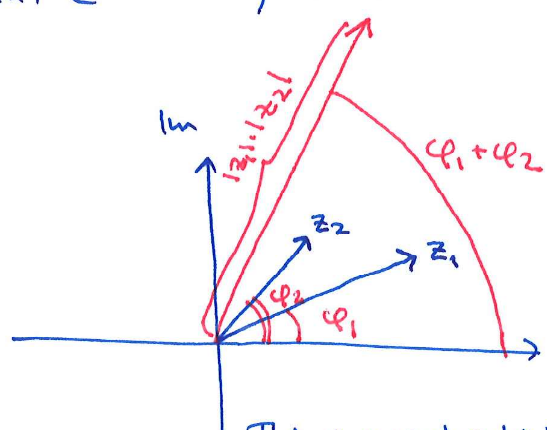
Myös käy $e^{i(\varphi+n2\pi)} = e^{i\varphi} \Rightarrow x = |x|\cdot e^{i(\varphi+n2\pi)}$

jos $\underline{x>0}$: $x = |x|\cdot e^{in2\pi}$; $n \in \mathbb{Z}$.

jos $\underline{x<0}$: $x = |x|\cdot e^{i\pi + in2\pi}$; $n \in \mathbb{Z}$.

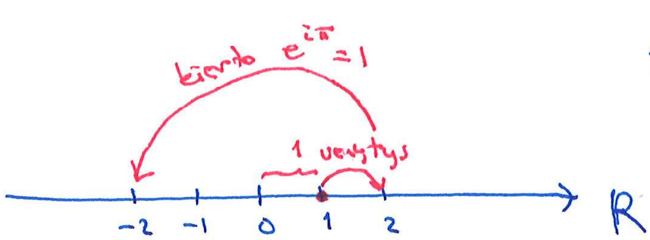
Kompleksilukujen tulo

$$z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot e^{i\varphi_1}\cdot|z_2|\cdot e^{i\varphi_2}$$
$$= |z_1\cdot z_2|\cdot e^{i\varphi_1 + i\varphi_2}$$
$$= |z_1\cdot z_2|\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$



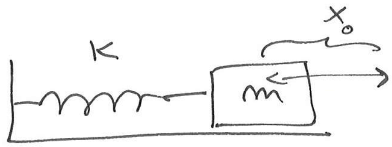
Tulo ⟷ venytys tai kutistus $(z_1\cdot z_2)$ ja kierto

Erityisesti reaalilukujen kertolasku, esim. $1\cdot(-2) = -2$:



$$1\cdot(-2) = 1\cdot 2\cdot e^{i\pi} = 2\cdot e^{i\pi} = -2.$$

Harmoninen värähtelijä



$$\sum F = -Kx$$

$$\text{N II} \Rightarrow \quad ma = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -Kx(t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{K}{m}x(t)} \qquad \text{2.kl homogeeninen dy}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad ; \quad \omega = \sqrt{K/m}.$$

Alkuehdot : $\begin{cases} x(0) = x_0 & \text{(alkupoikkeutus)} \\ \frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0} = 0 & \text{(alkunopeus)} \end{cases}$

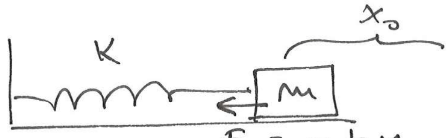
$$\Rightarrow \quad x(0) = x_0 = A\cdot\cos(0) + B\sin(0) = A \quad \Rightarrow \quad \underline{A = x_0}$$

$$\frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0} = \Big[-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\Big]\Big|_{t=0}$$

$$= B\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{B = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x(t) = x_0\cos\left(\sqrt{\tfrac{K}{m}}\,t\right)}$$

Lisätään lineaarinen (nopeudessa) vastusvoima:



$F_\lambda = -bv.$

$$\sum F = -Kx - b \cdot v = -Kx(t) - b\frac{dx(t)}{dt}.$$

NII:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -Kx(t) - b\frac{dx(t)}{dt}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{K}{m}x(t) = 0.$$ homogeeninen 2. kl dy

Vastaava karakteristinen yhtälö:

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{K}{m}\lambda = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\frac{K}{m}}}{2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}.$$

$\Rightarrow$

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}. & ; \text{ jos } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} & ; \text{ jos } \lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda. \end{cases}$$ "Kaksoisjuuri"

Ylivaimennettu värähtely: $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 > \frac{K}{m} = \omega_0^2$ | Vastaavan vaimenemattoman värähtelijän kulma taajuus $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

$\Rightarrow$ juuret reaaliset ja erisuuret. Olkoon $\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}} =: \omega$.

$$x(t) = Ae^{\left(-\frac{b}{2m}+\omega\right)t} + Be^{\left(-\frac{b}{2m}-\omega\right)t}.$$

Huom: $\frac{b}{2m} > 0, \ \omega > 0 \ \Rightarrow$ $-\frac{b}{2m} + \omega < 0$

$-\frac{b}{2m} - \omega < 0$

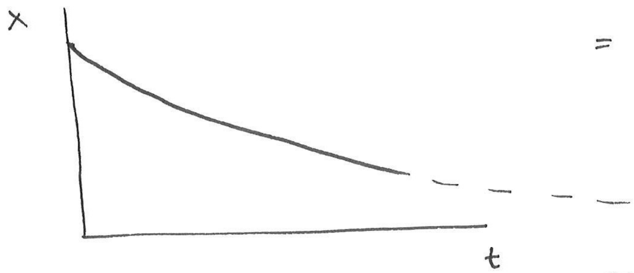
ja erityisesti $-\frac{b}{2m} - \omega < -\frac{b}{2m} + \omega.$

Ratkaisun osat

$$\underbrace{Ae^{\left(-\frac{b}{2m}+\omega\right)t}}_{\text{vaimenee nollaan hitaasti}} + \underbrace{Be^{\left(-\frac{b}{2m}-\omega\right)t}}_{\text{menee nollaan hyvin nopeasti}}$$

Kuinka hitaasti?

$$-\frac{b}{2m}+\omega = -\frac{b}{2m}+\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}$$



$$= -\frac{b}{2m}+\frac{b}{2m}\underbrace{\sqrt{1-\frac{4km}{b^2}}}$$

$$\approx 1-\frac{1}{2}\frac{4km}{b^2}$$; jos b suuri $\left(\frac{km}{b^2} \ll 1\right)$

$$\approx -\frac{b}{2m}+\frac{b}{2m}-\frac{\cancel{b}}{\cancel{2m}}\frac{2k\cancel{m}}{\cancel{b^2}} = -k/b$$

⇒ jos b suuri:

$$x(t) \approx A\underbrace{e^{-\frac{kt}{b}}}+Be^{-\frac{b}{m}t}.$$

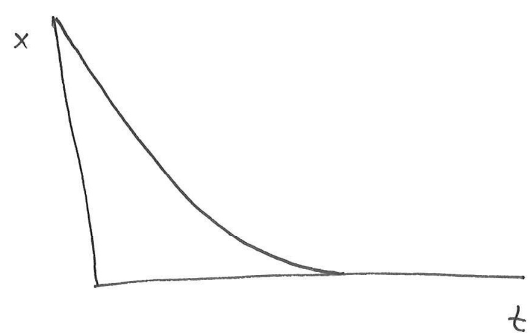
Vaimenemisen aikaskaala $\tau \sim \frac{b}{k}$.

Kriittinen vaimeneminen:

$$\frac{b}{2m}=\frac{k}{m}$$

⇒

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-\frac{b}{2m}t}}_{\text{vaimenee nopeammin}} + \underbrace{Bte^{-\frac{b}{2m}t}}_{\text{hitaammin}}$$



Alivaimennettu värähtely:

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}:$$

Pekka: $$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t) + Be^{-b/2m\,t}\sin(\omega t)\ ;$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}-\left(b/2m\right)^2} = \sqrt{\omega_0-\left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$