MS-C1420 Fourier-analyysi (Aalto-yliopisto)
Turunen / Saari

Välikoe 1 (29.9.2014 klo 17-19)

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

Tällä kertaa saat olettaa tunnetuksi Fourier-käänteismuunnoksen kaavan.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

1. Tarkastellaan signaaleja $q, r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, joille
$$q(t) = s'(t) \quad \text{ja} \quad r(t) = t\, s(t)$$
kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Esitä laskelmat, joista nähdään kuinka Fourier-muunnokset $\widehat{q}(\nu)$ ja $\widehat{r}(\nu)$ liittyvät Fourier-muunnokseen $\widehat{s}(\nu)$.

2. Todista, että Fourier-muunnos säilyttää sisätulon:
toisin sanoen näytä, että
$$\langle \widehat{r}, \widehat{s} \rangle = \langle r, s \rangle$$
pätee signaaleille $r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

3. a) Mikä on signaalien $r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konvoluutio $r * s$?

   b) Miten konvoluution $r*s$ Fourier-muunnos liittyy signaalien r, s Fourier-muunnoksiin? Perustele!

   c) Laske $s * s(t)$, kun $s(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.
   (Vihje: Saat käyttää tietoa $\widehat{s} = s$ tässä.)

MS-C1420 Fourier analysis (Aalto University)
Turunen / Saari

First mid-term exam (29.9.2014, 5pm–7pm)

Please fill in the required information onto each answer sheet.

Calculators and mathematical tables are not allowed.

This time you may use the Fourier inverse transform formula.

About grading: Every exam problem will be graded from 0 to 6 points. Harmless small errors do not prevent from getting maximal points. You will get points if your answer contains at least some information (relevant definitions, pictures, calculations etc) — empty answer is surely worth zero.

1. Let us study signals $q, r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ for which

$$q(t) = s'(t) \quad \text{and} \quad r(t) = t\, s(t)$$

for all $t \in \mathbb{R}$. Present calculations that show how the Fourier transforms $\widehat{q}(\nu)$ and $\widehat{r}(\nu)$ are related to the Fourier transform $\widehat{s}(\nu)$.

2. Prove that the Fourier transform preserves the inner product:
in other words, show that

$$\langle \widehat{r}, \widehat{s} \rangle = \langle r, s \rangle$$

holds for signals $r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

3. a) What is the convolution $r * s$ of the signals $r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$?

b) How is the Fourier transform of the convolution $r * s$ related to the Fourier transforms of the signals r, s? Justify!

c) Find $s * s(t)$ when $s(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ for all $t \in \mathbb{R}$.
(Hint: You may use the information $\widehat{s} = s$ here.)