MS-C1420 Fourier-analyysi (Aalto-yliopisto)
Turunen / Saari

Välikoe 2 (21.10.2014 klo 16:30–19:30)

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

1. Olkoon "riittävän mukava" jaksollinen signaali $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ määritelty kaavalla
$$s(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\cdot k},$$
missä luvut $c_k \in \mathbb{C}$. Laske huolellisesti Fourier-muunnos $\widehat{s} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Mikä on signaalin $s(t)$ esitys Fourier-sarjana silloin?

2. Tarkastellaan nyt jaksollisia digitaalisia signaaleja $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

   a) Miten määritellään diskreetti Fourier-muunnos $\widehat{s}$ ja vastaava käänteis-Fourier-muunnos tässä tapauksessa?

   b) Laske $\widehat{r}$, missä $r = \widehat{s}$ ja $s(t) = t$, kun $t \in \{0, 1, 2, 3\}$.

3. Signaalin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *Gabor-muunnos* $Gs : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on erikoistapaus ikkunoidusta Fourier-muunnoksesta. Se määritellään kaavalla
$$Gs(t, \nu) := \int_{\mathbb{R}} s(u) \; \mathrm{e}^{-\pi(u-t)^2} \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi u\cdot\nu} \; \mathrm{d}u.$$
Laske Gabor-muunnos, kun

   a) $s(u) = \delta_p(u)$ eli Dirac-delta hetkellä $p \in \mathbb{R}$,

   b) $s(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi u\cdot\alpha}$, missä $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (Vihje: Saat käyttää tässä tietoa $\widehat{r} = r$, jos $r(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$.)

MS-C1420 Fourier analysis (Aalto University)
Turunen / Saari

Second mid-term exam (21.10.2014, 4:30pm–7:30pm)

Please fill in the required information onto each answer sheet.

Calculators and mathematical tables are not allowed.

This time you may use the Fourier inverse transform formula.

About grading: Every exam problem will be graded from 0 to 6 points. Harmless small errors do not prevent from getting maximal points. You will get points if your answer contains at least some information (relevant definitions, pictures, calculations etc) — empty answer is surely worth zero.

1. Let us define "nice-enough" periodic signal $s : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ by formula

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t \cdot k},$$

   where $c_k \in \mathbb{C}$. Calculate carefully the Fourier transform $\widehat{s} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. What is the Fourier series for $s(t)$ then?

2. Let us now study periodic digital signals $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

   a) How do we define the discrete Fourier transform $\widehat{s}$ and the corresponding inverse Fourier transform in this case?

   b) Find $\widehat{r}$, where $r = \widehat{s}$ and $s(t) = t$, when $t \in \{0, 1, 2, 3\}$.

3. The *Gabor transform* $Gs : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ of signal $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is a special case of a Short-Time Fourier Transform. It is defined by the formula

$$Gs(t, \nu) := \int_{\mathbb{R}} s(u) \; \mathrm{e}^{-\pi(u-t)^2} \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi u \cdot \nu} \; \mathrm{d}u.$$

   Find the Gabor transform, when

   a) $s(u) = \delta_p(u)$, that is the Dirac delta at time $p \in \mathbb{R}$,

   b) $s(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi u \cdot \alpha}$, where $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (Hint: You may use here the fact that $\widehat{r} = r$, if $r(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$.)