MS-C1420 Fourier-analyysi (Aalto-yliopisto)
Turunen / Saari

Tentti ja välikokeiden uusinnat (11.11.2014)

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Tentti: Tehtävät 2,3,4,6.
Välikokeen 1 uusinta: Tehtävät 1,2,3.
Välikokeen 2 uusinta: Tehtävät 4,5,6.

Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

Tällä kertaa saat olettaa tunnetuksi Fourier-käänteismuunnoksen kaavan.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen. Muista mainita laskuissasi, jos käytät joitakin Fourier-analyysin kurssilla tunnettuja muunnosten ominaisuuksia.

---

1. Tiedetään, että $\widehat{\varphi} = \varphi$, kun $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Laske tämän tiedon avulla $\widehat{s} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, kun $s(t) = \mathrm{e}^{-3t^2}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

2. Laske $\lim_{h \to 0} \widehat{s_h}(\nu)$, missä signaali $s_h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ määritellään kaavalla

$$s_h(t) = \begin{cases} 1/|h|, & \text{kun } |t| < |h|, \\ 0, & \text{kun } |t| \geq |h|. \end{cases}$$

3. Todista, että Fourier-muunnos säilyttää energian eli että

$$\|\widehat{s}\|^2 = \|s\|^2$$

pätee signaaleille $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

---

4. Millä kaavoilla signaalien

$$\begin{aligned} q &: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \\ r &: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \\ s &: \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \end{aligned}$$

Fourier-muunnokset $\widehat{q}, \widehat{r}, \widehat{s}$ lasketaan? Selitä myös, mitä arvoja taajuudella on kunkin Fourier-muunnoksen tapauksessa.

5. Otetaan jaksottomasta signaalista $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ näytteet $s(k/8000)$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Millä edellytyksin signaali s saadaan palautettua näytteistään? Laske myös tämä palautuskaava

$$s(t) = \ldots$$

(Vihje: Saat käyttää tässä normalisoitua Whittaker–Shannon-näytekaavaa

$$s_1(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_1(k) \operatorname{sinc}(t-k),$$

missä signaalille $s_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pätee $\widehat{s_1}(\nu) = 0$ aina kun $|\nu| \geq 1/2$.)

6. Olkoon $s(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$. Laske silloin tiedon $\widehat{s} = s$ avulla

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi (t-u)\cdot\nu} \ s(u) \ k(t,u,\nu) \ \mathrm{d}u \ \mathrm{d}\nu,$$

kun
a) $k(t,u,\nu) = s(u)$,
b) $k(t,u,\nu) = \widehat{s}(\nu)$.