

Välikoe 1 (18.3.2015 klo 17-19)

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

Tällä kertaa saa olettaa tunnetuksi Fourier-käänteismuunnoksen kaavan.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteittää jokaisen tehtävän asteikolla 0..6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen. Kurssin läpipääsyyn tarvitaan kummastakin välikokeesta vähintään 3 pistettä.

1. Laske Fourier-muunnos $\hat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, kun signaalille $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pätee

$$s(t) := \begin{cases} e^{-\pi t}, & \text{jos } t > 0, \\ 0, & \text{jos } t \leq 0. \end{cases}$$

Sievennä vastauksesi niin, että lukujen $\hat{s}(\nu) \in \mathbb{C}$ reaali- ja imaginaariosat näkyvät helposti. Millä taajuudella energiatiheys $|\hat{s}|^2$ on suurin?

2. Täsmällisyydestään kuuluisa orkesteri aikoi esittää klo $t = 0$ alkavassa konsertissaan signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Valitettavasti konsertin alku myöhästyi, ja konsertti oli kuitenkin lopetettava suunniteltuun aikaan (koska kaikki halusivat täsmällisesti kotiin). Vastaavasti muusikot joutuivat soittamaan nopeammin ja lujempaa (jotta energia säilyisi samana): siten he esittivätkin signaalin $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jolle

$$r(t) = C s(2t - 3),$$

missä vakio $C > 0$.

- a) Milloin konsertti alkoi? Entä milloin se päättyi? Mikä on vakion $C > 0$ arvo, kun tiedetään, että signaalien r ja s energiat ovat samat?
 - b) Miten signaalien r ja s Fourier-muunnokset liittyvät toisiinsa? Eli mikä on kaava $\hat{r}(\nu) = \dots$ funktion \hat{s} avulla ilmoitettuna?
3. Olkoon $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ "riittävän mukava" reaaliarvoinen signaali. Olkoot $r(t) := q(t) + q(-t)$ ja $s(t) := r(t) + \hat{r}(t)$.

Näytä laskemalla seuraavat asiat:

- a) \hat{r} on reaaliarvoinen ja $\hat{r}(-\nu) = \hat{r}(\nu)$,
- b) $\hat{s} = s$.