

Välikoe/Mellanförhör/Midterm exam 1 (28.9.2015, 18-20)

Pisteitä myös hyvästä yrityksestä! **Laskimet ja kirjallisuus kielletty.**
Poäng också för goda försök! **Kalkylator och litteratur är förbjudna.**
Points also for good effort! **Calculators and literature forbidden.**

1. Laske signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-muunnos, missä $s(t) = 1$ kun $|t| \leq 2015$, ja $s(t) = 0$ kun $|t| > 2015$. Sievennä tulos reaaliseksi! (Huomaa, että taajuuudet $\nu = 0$ ja $\nu \neq 0$ on käsiteltävä erikseen!)
2. Mitä tarkoittaa, että "Fourier-muunnos säilyttää energian"? Laske signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ energia, missä

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it \cdot \alpha} e^{-|\alpha|} d\alpha.$$

(Vihje: Energian säilyminen voi helpottaa tässä.)

3. Tiedetään, että $\hat{r} = r$, kun $r(t) = e^{-\pi t^2}$. Etsi differentiaaliyhtälön

$$s(t) - s''(t) = e^{-\pi t^2}$$

ratkaisu s muodossa

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi t \cdot \nu} \hat{a}(\nu) d\nu$$

eli etsi $\hat{a}(\nu)$.

1. Räkna Fourier-transformen av signalen $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, där $s(t) = 1$ om $|t| \leq 2015$, och $s(t) = 0$ om $|t| > 2015$. Skriv ditt svar med reella värden! (Obs! Frekvenserna $\nu = 0$ och $\nu \neq 0$ måste behandlas separat!)
2. Vad menar man med att "Fourier-transformen bevarar energin"? Beräkna energin av signalen $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, där

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it \cdot \alpha} e^{-|\alpha|} d\alpha.$$

(Tips: Bevarandet av energin kan vara till hjälp här.)

3. Vi vet att $\hat{r} = r$, när $r(t) = e^{-\pi t^2}$. Sök lösningen s till differentialekvationen

$$s(t) - s''(t) = e^{-\pi t^2}$$

i formen

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi t \cdot \nu} \hat{a}(\nu) d\nu,$$

det vill säga: Räkna ut $\hat{a}(\nu)$.

-
1. Find the Fourier transform of the signal $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, where $s(t) = 1$ when $|t| \leq 2015$, and $s(t) = 0$ when $|t| > 2015$. Write your solution real-valued! (Notice that the frequencies $\nu = 0$ and $\nu \neq 0$ have to be handled separately!)

2. What do we mean by the phrase “Fourier transform preserves energy”? Find the energy of the signal $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, where

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it \cdot \alpha} e^{-|\alpha|} d\alpha.$$

(Hint: Preservation of energy might help here.)

3. We know that $\widehat{r} = r$ when $r(t) = e^{-\pi t^2}$. Find the solution s to the differential equation

$$s(t) - s''(t) = e^{-\pi t^2}$$

in the form

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi t \cdot \nu} \widehat{a}(\nu) d\nu,$$

that is, find $\widehat{a}(\nu)$.