MS-C1420 Fourier-analyysi/Fourieranalys/Fourier Analysis (Aalto)
Turunen, Mustonen

Välikoe/Mellanförhör/Midterm exam 2 (19.10.2015, 13:00-16:00)

Pisteitä myös hyvästä yrityksestä! **Laskimet ja kirjallisuus kielletty.**
Poäng också för goda försök! **Kalkylator och litteratur är förbjudna.**
Points also for good effort! **Calculators and literature forbidden.**

1. *Dirichlet-ydin* $D_N : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ määritellään $D_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\cdot k}$.

   a) Laske $\widehat{D_N} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

   b) Näytä, että $D_N(t) = \dfrac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}$, kun $t \notin \mathbb{Z}$.
   (Vihje: $2\mathrm{i}\sin(\alpha) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$, ja $2\mathrm{i}\sin(\pi t)D_N(t) = \cdots$, missä havainto $(a-b)+(b-c)+(c-d)+(d-e)+(e-f) = a-f$ voi auttaa.)

2. Miten määritellään signaalin $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ diskreetti Fourier-muunnos? Miten matriisi $\begin{bmatrix} -\mathrm{i} & -1 & +\mathrm{i} & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ +\mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$ esittää diskreettiä Fourier-muunnosta tapauksessa $N = 4$? Laske signaalin $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ Fourier-muunnos, kun
$$(s(0), s(1), s(2), s(3)) = (5, 2, 3, 2).$$

3. Signaalin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *monitulkintaisuus* $A[s] : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lasketaan
$$A[s](\tau, u) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t\cdot\tau}\, s(t+u/2)\, s(t-u/2)^*\, \mathrm{d}t.$$
   Laske $A[s]$, kun $s(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ (tiedämme, että silloin $\widehat{s} = s$).

---

1. Man definierar *Dirichlet-kärnan* $D_N : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ som $D_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\cdot k}$.

   a) Beräkna $\widehat{D_N} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

   b) Visa, att $D_N(t) = \dfrac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}$, när $t \notin \mathbb{Z}$.
   (Tips: $2\mathrm{i}\sin(\alpha) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$, och $2\mathrm{i}\sin(\pi t)D_N(t) = \cdots$, där resultatet $(a-b)+(b-c)+(c-d)+(d-e)+(e-f) = a-f$ kan vara till hjälp.)

2. Hur definierar man den diskreta Fourier-transformen av signalen $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$? På vilket sätt representerar matrisen $\begin{bmatrix} -\mathrm{i} & -1 & +\mathrm{i} & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ +\mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$ den diskreta Fourier-transformen då $N = 4$? Beräkna den diskreta Fourier-transformen av signalen $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, där

$$(s(0), s(1), s(2), s(3)) = (5, 2, 3, 2).$$

3. *Ambiguiteten* $A[s] : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ av signalen $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definieras som

$$A[s](\tau, u) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t\cdot\tau}\, s(t + u/2)\, s(t - u/2)^*\, \mathrm{d}t.$$

Beräkna $A[s]$, när $s(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ (vi vet att då gäller $\widehat{s} = s$).

---

1. The *Dirichlet kernel* $D_N : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ is defined by $D_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\cdot k}$.

a) Find $\widehat{D_N} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

b) Show that $D_N(t) = \dfrac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}$, when $t \notin \mathbb{Z}$.
(Hint: $2\mathrm{i}\sin(\alpha) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$, and $2\mathrm{i}\sin(\pi t) D_N(t) = \cdots$, where observation $(a-b)+(b-c)+(c-d)+(d-e)+(e-f) = a-f$ might help.)

2. How is the discrete Fourier transform of signal $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ defined? How does the matrix $\begin{bmatrix} -\mathrm{i} & -1 & +\mathrm{i} & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ +\mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$ represent the discrete Fourier transform, when $N = 4$? Find the discrete Fourier transform for signal $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, when

$$(s(0), s(1), s(2), s(3)) = (5, 2, 3, 2).$$

3. The *ambiguity* $A[s] : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ of signal $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is calculated by

$$A[s](\tau, u) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t\cdot\tau}\, s(t + u/2)\, s(t - u/2)^*\, \mathrm{d}t.$$

Find $A[s]$, when $s(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$ (we know that then $\widehat{s} = s$).