MS-C1420 Fourier-analyysi (Aalto-yliopisto) Turunen / Mustonen

6.4.2016, 13:00–16:00

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja kirjallisuus kielletty.

Tällä kertaa saat olettaa tunnetuksi Fourier-käänteismuunnoksen kaavan.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

1. Tiedetään, että $\widehat{r} = r$, kun $r(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$. Laske tämän tiedon ja osittaisintegroinnin avulla Fourier-muunnos $\widehat{s}$, kun $s(t) = t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

2. Todista, että Fourier-integraalimuunnos säilyttää sisätulon: toisin sanoen näytä, että
$$\langle \widehat{r}, \widehat{s} \rangle = \langle r, s \rangle$$
pätee "riittävän mukaville" ei-jaksollisille signaaleille $r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Mitä energian säilyminen tarkoittaa tässä?

3. Hetkellä $t \in \mathbb{R}$ olkoon
$$s(t) = 1 + \cos(4\pi t) + \sin(6\pi t).$$
Laske tämän 1-periodisen signaalin s Fourier-kertoimet eli Fourier-muunnos $r = \widehat{s} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Laske myös Fourier-muunnos $\widehat{r} = \widehat{\widehat{s}}$.

4. Laske 4-periodisen digitaalisen signaalin $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ diskreetti Fourier-muunnos $r = \widehat{s}$, kun
$$s(0) = 2, \quad s(1) = 1, \quad s(2) = 0 \quad \text{ja} \quad s(3) = 1.$$
Laske myös $\widehat{r} = \widehat{\widehat{s}}$. Sievennä tulokset reaalisiksi.