

Fourier-analyysi, I/22, Laskuharjoitus 1.

Harjoitustehtäviä lasketaan paikalla harjoituksessa. Kotitehtävä (3p.) palautetaan Mycoursesiin.

Harjoitustehtävä 1.1. Laske $\int_0^\infty s(t) dt$, missä $s(t) = e^{-3\pi t} \sin(2\pi t)$.

Harjoitustehtävä 1.2. Pätee $e^{w+z} = e^w e^z$, kun $w, z \in \mathbb{C}$, ja tunnetaan myös *Eulerin kaava*

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t), \quad (1.1)$$

missä $t \in \mathbb{R}$ ja i on imaginaariyksikkö. Todista tämän avulla kaavat

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{i2},$$

$$\cos(2t) = \cos(t)^2 - \sin(t)^2 \quad \text{ja} \quad \sin(2t) = 2 \cos(t) \sin(t).$$

Harjoitustehtävä 1.3. Hahmottele kuva 3-dimensioisen avaruuden \mathbb{R}^3 sylinteriputkesta

$$\{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Havainnollista Eulerin kaavaa (1.1) piirtämällä sylinterin pinnalle käyrä $r : [-2\pi, +2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, missä $r(t) := (t, \cos(t), \sin(t))$.

Harjoitustehtävä 1.4. Tarkista, että $t \mapsto \exp(-t^2)$ ratkaisee differentiaaliyhtälön alkuarvo-ongelman

$$\begin{cases} s'(t) = -2t s(t), \\ s(0) = 1. \end{cases}$$

Miksi tällä ongelmalla ei ole muita ratkaisuja s ?

Vihje: Laske derivaatta $r'(t)$, kun $r(t) = \exp(t^2) s(t)$. Sovella *Integraalilaskennan peruslausetta*: ”Jos derivaatta katoaa, niin funktio on vakio.”

Kotitehtävä 1.1. Määritellään signaalit $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ kaavalla

$$s_k(t) := \begin{cases} k, & \text{kun } |t| \leq 1/(2k), \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Näytä laskemalla, että

$$\widehat{s}_k(\nu) = \text{sinc}(\nu/k),$$

missä *kardinaalisinifunktiolle* $\text{sinc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pätee

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \sin(\pi x)/(\pi x), & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Mitä tapahtuu, kun $k \rightarrow \infty$?

Hahmottele myös funktioiden s_k ja \widehat{s}_k kuvaajat.