

Fourier-analyysi, I/22, Laskuharjoitus 3.

Analogisen signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier-muunnos $\widehat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ määritellään kaavalla

$$\widehat{s}(\nu) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t \cdot \nu} s(t) dt.$$

Harjoitustehtäviä lasketaan paikalla harjoituksessa. Kotitehtävä (3p.) palautetaan Mycoursesiin.

Harjoitustehtävä 3.1. Kun $r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ovat Fourier-muuntuvia ja $c \in \mathbb{C}$ vakio, niin

$$\begin{aligned}\widehat{cs}(\nu) &= c\widehat{s}(\nu), \\ \widehat{r+s}(\nu) &= \widehat{r}(\nu) + \widehat{s}(\nu),\end{aligned}$$

missä $(cs)(t) := cs(t)$ ja $(r+s)(t) := r(t) + s(t)$. Tarkista tämä Fourier-muunnoksen lineaarisuus suoralla laskulla!

Harjoitustehtävä 3.2. Olkoot $q, r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sellaisia, että

$$q(t) = s(t-a) \quad \text{ja} \quad r(t) = s(bt),$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$ vakioita ja $b \neq 0$. Tarkista laskemalla, että

$$\begin{aligned}\widehat{q}(\nu) &= e^{-i2\pi a \cdot \nu} \widehat{s}(\nu), \\ \widehat{r}(\nu) &= \frac{1}{|b|} \widehat{s}(\nu/b).\end{aligned}$$

Samoin tarkista kaava

$$\widehat{k}(\nu) = \widehat{s}(\nu - \alpha),$$

missä $k(t) = e^{+i2\pi t \cdot \alpha} s(t)$.

Harjoitustehtävä 3.3. Oletetaan, että analoginen signaali $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on reaaliarvoinen. Miten tämä näkyy Fourier-muunnoksessa $\widehat{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$?

Harjoitustehtävä 3.4. Oletetaan, että sekä signaali $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, että sen Fourier-muunnos \widehat{s} ovat reaaliarvoisia.

Miten tämä näkyy signaalissa s ?

Kotitehtävä 3.1. Laske signaalin $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ energia, missä $s(t) = \int_{-1}^4 e^{i6\pi t \cdot \nu} d\nu$.

(Vihje: Energian säilyminen voi helpottaa laskua.)