Fourier-analyysi, I/22, Laskuharjoitus 5.

Signaalin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ energia on

$$\|s\|^2 = \|s\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 \, \mathrm{d}t,$$

ja äärellisenergiaisten signaalien r, s sisätulo on

$$\langle r, s \rangle = \int_{\mathbb{R}} r(t)\, s(t)^* \, \mathrm{d}t.$$

Harjoitustehtäviä lasketaan paikalla harjoituksessa. Kotitehtävä (3p.) palautetaan Mycoursesiin.

Harjoitustehtävä 5.1. Signaalien $r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *korrelaatio* on signaali $COR(r, s) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, jolle

$$COR(r, s)(u) := \int_{\mathbb{R}} r(t + u)\, \overline{s(t)} \, \mathrm{d}t.$$

Miten signaalien $r, s, COR(r, s)$ Fourier-muunnokset liittyvät toisiinsa? Erityisesti: miten signaalin s Fourier-muunnos liittyy ns. *autokorrelaation* $COR(s, s)$ Fourier-muunnokseen?

Harjoitustehtävä 5.2. Olkoon $\psi_\sigma(t) := 2\sigma/(\sigma^2 + (2\pi t)^2)$, kun $\sigma > 0$. Näytä, että $\psi_\rho * \psi_\sigma = \psi_{\rho+\sigma}$. (Vihje: laske $\widehat{s}(\nu)$, missä $s(t) = \mathrm{e}^{-a|t|}$, kun $a > 0$.)

Harjoitustehtävä 5.3. Todista, että $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, kun $x, y \in \mathbb{R}$. Selitä, miksi tästä seuraa

$$\frac{\|rs\|_{L^1}}{\|r\|\,\|s\|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{|r(t)|}{\|r\|} \frac{|s(t)|}{\|s\|} \, \mathrm{d}t \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \left(\frac{|r(t)|^2}{\|r\|^2} + \frac{|s(t)|^2}{\|s\|^2} \right) \mathrm{d}t = 1.$$

Harjoitustehtävä 5.4. Todista:

a) *Hölder-epäyhtälö*

$$\|rs\|_{L^1} \leq \|r\|\,\|s\|.$$

b) *Cauchy–Schwarz-epäyhtälö*

$$|\langle r, s \rangle| \leq \|r\|\,\|s\|.$$

c) *Minkowski-epäyhtälö*

$$\|r + s\| \leq \|r\| + \|s\|.$$

Kotitehtävä 5.1. Tiedämme, että energia $\|s\|^2 = \|s\|_{L^2}^2$ säilyy Fourier-muunnoksessa — pätee siis normien yhtälö $\|\widehat{s}\|_{L^2} = \|s\|_{L^2}$.
Tarkastellaan muiden L^p-normien keskinäisiä riippuvuuksia:
a) Näytä, että

$$\|\widehat{s}\|_{L^\infty} \leq \|s\|_{L^1} \quad \text{ja} \quad \|s\|_{L^\infty} \leq \|\widehat{s}\|_{L^1}.$$

b) Näytä, että

$$\|r * s\|_{L^\infty} \leq \|r\|_{L^\infty} \|s\|_{L^1}.$$

Siis: $r * s$ on olennaisesti rajoitettu,
jos r on olennaisesti rajoitettu ja s itseisesti integroituva.
c) Näytä, että

$$\|r * s\|_{L^2} \leq \|\widehat{r}\|_{L^\infty} \|s\|_{L^2} \leq \|r\|_{L^1} \|s\|_{L^2}.$$

Siis: $r * s$ on energialtaan äärellinen,
jos s on energialtaan äärellinen ja $\widehat{r}$ olennaisesti rajoitettu
(erityisesti, kun r itseisesti integroituva).