

Fourier-analyysi, I/22, Laskuharjoitus 6.

Harjoitustehtäviä lasketaan paikalla harjoituksessa. Matlab-tehtävä (3p.) palautetaan Mycourse-siin.

Harjoitustehtävä 6.1. Näytä laskemalla, että

$$\widehat{r s}(\nu) = \widehat{r} * \widehat{s}(\nu),$$

missä $(r s)(t) := r(t) s(t)$.

Harjoitustehtävä 6.2. Kun Gaussin normaalijakauman keskiarvo on μ ja varianssi σ^2 , on sen tiheysfunktion f_{μ, σ^2} lauseke $f_{\mu, \sigma^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-((t-\mu)^2/\sigma^2)/2}$. Näytä laskemalla, että konvoluutio $f_{\mu, \sigma^2} * f_{\lambda, \rho^2}$ on myös normaalijakauma.

Harjoitustehtävä 6.3. Olkoon $b > 0$ vakio. Näytä, että differentiaaliyhtälöstä

$$s(t) - b s''(t) = r(t)$$

voidaan ratkaista funktio $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ konvoluutiona $s = q * r$, missä $q(t) = \lambda e^{-\mu|t|}$ eräillä vakioilla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$.

Harjoitustehtävä 6.4. Laske Heaviside-funktion $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ distribuutioderivaatta H' , missä

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{jos } t > 0, \\ 0, & \text{jos } t < 0. \end{cases}$$

(Huom. Tässä arvolla $H(0) \in \mathbb{R}$ ei ole väliä!)

Matlab-tehtävä 6.1. Tarkastellaan signaalina $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Gauss-tyyppistä funktiota:

$$s(t) = e^{-\pi t^2}, \quad \text{jolloin} \quad \widehat{s}(\nu) = e^{-\pi \nu^2}.$$

Muokkaa Matlab-tehtävän 4.1:n algoritmista lyhyt Matlab-ohjelma, joka laskee likimääräisesti yllä olevan signaalin s Fourier-muunnoksen. Palauta myös kuva, josta voi nähdä, että ohjelmasi todella laskee Fourier-muunnoksen hyvällä tarkkuudella!

(Huomaa, että tässä $s(t) \approx 0$, kun $|t|$ on ”riittävän suuri”.)

Vinkki: Tätä kannattaa tarkastella sekä ajassa että taajuudessa samoilla yksiköillä, esim. aikaväli $[-5, 5]$ ja taajuusväli $[-5, 5]$. Muunnoksen fs pitäisi olla reaalinen (pieniä virheitä lukuunottamatta). Muunnoksen voi todeta samaksi Gaussin funktion kanssa piirtämällä nämä samaan kuvaan tai vaikkapa piirtämällä kuva näiden erotuksen itseisarvosta (pitäisi olla suuruudeltaan likimain luokkaa 10^{-16})