

## Fourier-analyysi, I/22, Laskuharjoitus 9.

Digitaalinen signaali  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  on  $N$ -periodinen, jos  $s(t - N) = s(t)$  jokaisella  $t \in \mathbb{Z}$ : silloin merkitään  $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , ja vastaava diskreetti Fourier-muunnos eli DFT (Discrete Fourier Transform)  $\widehat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  määritellään kaavalla

$$\widehat{s}(\nu) := \sum_{t=1}^N e^{-i2\pi t \nu / N} s(t).$$

Harjoitustehtäviä lasketaan paikalla harjoituksessa. Kotitehtävä (3p.) palautetaan Mycoursesiin.

---

**Harjoitustehtävä 9.1.** Laske digitaalisen signaalin  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  diskreetin ajan Fourier-muunnos  $\widehat{s} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , kun

$$s(t) = 2^{-|t|}.$$

(Symmetrian vuoksi muunnos on tässä reaaliarvoinen, joten sievennä vastauksesi reaaliseksi!)

**Harjoitustehtävä 9.2.** Modulaarisen aritmetiikan alkeita — tässä mod 7 ja mod 24:

- Mikä viikonpäivä on 7654 vuorokauden kuluttua ensi sunnuntaista?
- Mikä kellonaika on 7654 tunnin kuluttua huomisesta keskipäivästä?

**Harjoitustehtävä 9.3.** Hahmottele kuva kompleksitason pisteistä  $e^{i2\pi k/N}$ , missä  $k \in \mathbb{Z}$  ja

- $N = 3$ ,
- $N = 12$ .

Laske  $\sum_{k=1}^N e^{i2\pi k/N}$ , kun  $N \in \mathbb{Z}^+$  (tällä on jokin geometrinen merkitys...).

**Harjoitustehtävä 9.4.** Laske signaalin  $s : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  diskreetti Fourier-muunnos, kun  $s(t) = (-1)^t$ .

**Harjoitustehtävä 9.5.** a) Miten  $\widehat{r} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  liittyy signaaliin  $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , kun  $r = \widehat{s}$ ?  
b) Mikä on DFT:n käänteismuunnoksen kaava? Siis miten  $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  saadaan laskettua, kun  $\widehat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  tunnetaan?

**Kotitehtävä 9.1.** Laske 4-periodisen digitaalisen signaalin  $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  diskreetti Fourier-muunnos  $r = \widehat{s}$ , kun

$$s(0) = 6, \quad s(1) = -5, \quad s(2) = 4 \quad \text{ja} \quad s(3) = -5.$$

Laske myös  $\widehat{r} = \widehat{\widehat{s}}$ . Sievennä tulokset reaaliseksi.