Fourier-analyysi, I/22, Laskuharjoitus 10.

Digitaalinen signaali $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ on N-periodinen, jos $s(t-N) = s(t)$ jokaisella $t \in \mathbb{Z}$: silloin merkitään $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, ja vastaava diskreetti Fourier-muunnos eli DFT (Discrete Fourier Transform) $\widehat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ määritellään kaavalla

$$\widehat{s}(\nu) := \sum_{t=1}^{N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t\cdot\nu/N}\, s(t).$$

Harjoitustehtäviä lasketaan paikalla harjoituksessa. Matlab-tehtävä (3p.) palautetaan Mycoursesiin.

Harjoitustehtävä 10.1. Laske signaalin $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ diskreetti Fourier-muunnos, kun $s(t) = \mathrm{i}^t$.

Harjoitustehtävä 10.2. Määritellään $e_\beta, \delta_b : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ kaavoilla

$$e_\beta(t) := \mathrm{e}^{+\mathrm{i}2\pi t\cdot\beta/N}, \qquad \delta_b(t) := \begin{cases} 1, & \text{jos } (t-b)/N \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Laske $\widehat{e_\beta}, \widehat{\delta_b} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

Harjoitustehtävä 10.3. Oletetaan, että haluat laskea signaalin $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ diskreetin Fourier-muunnoksen $\widehat{s} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$; kuinka käytät tähän `fft`-komentoa?
Muistutus: `Matlab`-ohjelman `fft`-komento laskee vektorin `y=fft(x)` vektorista

```
x=[x(1) x(2) ... x(N)]
```

siten, että

$$\mathtt{y(m)} = \sum_{\mathtt{k}=1}^{\mathtt{N}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\mathtt{(k-1)(m-1)/N}}\, \mathtt{x(k)} \qquad (\text{jossa} \quad \mathtt{m} \in \{1, 2, \cdots, N\}).$$

Harjoitustehtävä 10.4. Analogisen jaksottoman signaalin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ja sen Fourier-integraalimuunnoksen $\widehat{s} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ energiat ovat tunnetusti samat. Sen sijaan digitaalisen jaksollisen signaalin $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ energia

$$\|s\|^2 := \sum_{t=1}^{N} |s(t)|^2$$

ei yleensä säily tavallisella kaavalla määritellyssä diskreetissä Fourier-muunnoksessa, vaan $\|s\|^2 = c_N \|\widehat{s}\|^2$. Etsi tämä vakio c_N.
(Huom. Jos olisi ehdottomasti haluttu energian säilyvyys, olisi DFT pitänyt määritellä sopivasti painotettuna.)

Matlab-tehtävä 10.1. Tällä kertaa tarkastelussa on spektrogrammi.

(a) Kokeile seuraavaa ohjelmaa:

```
clear all;
n=1000; t=(1:n)/n;
s=sin(2*pi./t);
for k=1:n,
  window=exp(-(t-k/n).^2*1000);
  specs(:,k)=abs(fft(s.*window)).^2;
end;
spec=specs(1:n/2,:);
image(spec); colormap(1-gray);
set(gca, 'YDir', 'normal');
```

(b) Palauta (a)-kohdassa tuotettu `Matlab`-kuva ja kirjoita lyhyt selostus ohjelman laskemasta Fourier-analyysistä ja siitä, mitä kuva esittää. Oletetaan tässä, että tarkoitus oli tutustua signaaliin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, jolle

$$s(t) = \begin{cases} \sin(2\pi/t), & \text{kun } t > 0, \\ 0, & \text{kun } t \leq 0. \end{cases}$$

Miksi `Matlab`-kuva ei ole luotettava ajanhetken $t = 0$ lähistöllä?