Fourier-analyysi, I/22, Laskuharjoitus 12.

Tarkastellaan signaaleja $s, w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Signaalin s w-ikkunoitu Fourier-muunnos on $F(s,w) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, missä

$$F(s,w)(t,\nu) := \int_{\mathbb{R}} s(u)\, \overline{w(u-t)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi u\cdot\nu}\, \mathrm{d}u,$$

ja signaalin vastaava w-spektrogrammi on $|F(s,w)|^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.
Harjoitustehtäviä lasketaan paikalla harjoituksessa. Muista vastata kurssipalautekyselyyn (1p.).

Harjoitustehtävä 12.1. Miten signaali s saadaan laskettua ikkunoidusta Fourier-muunnoksesta $F(s,w)$, kun ikkuna w tunnetaan ja $w(t) \neq 0$?

Harjoitustehtävä 12.2. Signaalin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Wigner-aikataajuusjakauma $Ws : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään

$$Ws(t,\nu) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi u\cdot\nu}\, s(t+u/2)\, \overline{s(t-u/2)}\, \mathrm{d}u.$$

Laske Ws, kun $s(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$.
(Voit käyttää laskussa tietoa $\widehat{s}(\nu) = s(\nu)$, kun $s(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$.)

Harjoitustehtävä 12.3. Signaalin s Born–Jordan-jakauma on $Qs := Q(s,s)$, missä signaalien $r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Born–Jordan-muunnos $Q(r,s) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lasketaan

$$Q(r,s)(t,\nu) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi u\cdot\nu}\, \frac{1}{u} \int_{t-u/2}^{t+u/2} r(z+u/2)\, \overline{s(z-u/2)}\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}u.$$

Näytä, että Qs on reaalinen ja laske

$$\int_{\mathbb{R}} Qs(t,\nu)\, \mathrm{d}\nu, \qquad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Qs(t,\nu)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\nu.$$

Harjoitustehtävä 12.4. Tarkastellaan ”riittävän mukavaa” jaksotonta signaalia $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, jolle

$$r(t) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(t-u)\cdot\nu}\, s(u)\, \frac{1}{u-t} \int_t^u \sigma(z,\nu)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}\nu.$$

Miten signaalit r, s liittyvät toisiinsa, jos kaikilla $z, \nu \in \mathbb{R}$ pätee

a) $\sigma(z,\nu) = 1$?
b) $\sigma(z,\nu) = \mathrm{e}^{-z^2}$?

(Huomaa, että $\frac{1}{u-t}\int_t^u \cdots$ on tulkittava raja-arvona, kun $t = u$.)