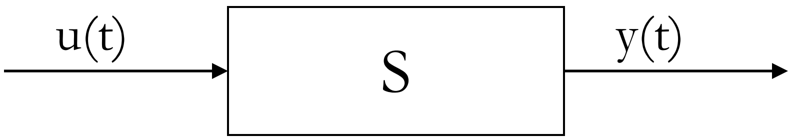
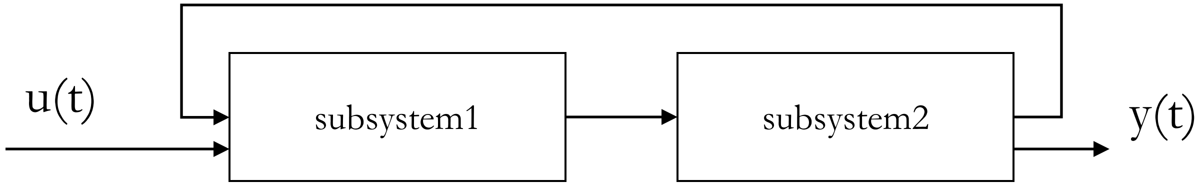
Systeemimallit: sisältö

- Mallityypit ja muuttujat
- Input-output -kuvaus ja tilayhtälömalli, tila
- Linearisointi
- Jatkuva-aikaisen lineaarisen järjestelmän siirtofunktio, stabiilisuus
  - Laplace-muunnos
- Diskreettiaikaisen lineaarisen järjestelmän (pulssin)siirtofunktio, stabiilisuus
  - z-muunnos
- Diskretointi

Joitain mallityyppejä

- Matemaattinen malli: muuttujien väliset suhteet kuvattu matemaattisesti yhtälöin
- Lohkokaaviomalli: systeemin toimintojen looginen jako lohkoihin, joiden välisiä vuorovaikutuksia kuvataan nuolin





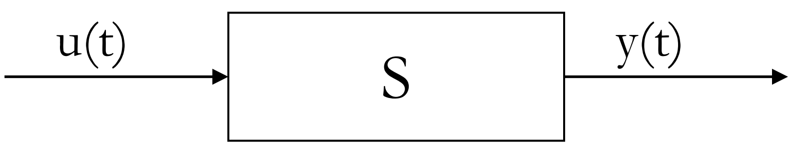
- simulaatiomalli: malli ehkä olemassa vain tietokoneohjelmana (joka on ehkä jäsennetty matemaattisesta tai lohkokaaviomallista)

Sisäänmeno, ulostulo ja häiriöt

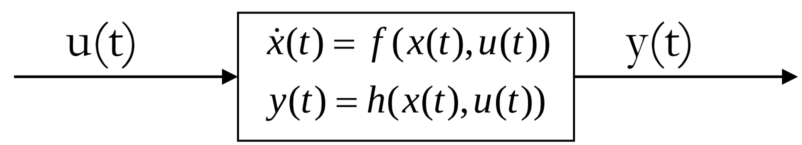
- Mallin vakiot:
  - systeemiparametrit
  - suunnitteluparametrit
- Mallin muuttujat:
  - ulostulot (output) $y(t)=[y_1(t),\ldots, y_p(t)]^T$
  - sisäänmenot (input, ohjaus) $u(t)=[u_1(t),\ldots,u_m(t)]^T$
    - voidaan valita
  - häiriöt $w(t)=[w_1(t),\ldots,w_r(t)]^T$
    - ei voida valita
  - Sisäänmenoja ja häiriöitä kutsutaan ulkoisiksi muuttujiksi, muita mallin muuttujia sisäisiksi
- Dynaamisessa järjestelmässä $y(t)$ riippuu paitsi $u(t)$:stä ja $w(t)$:stä myös kaikista $u(s)$ ja $w(s)$, $s<t$

Tila

- Aiemmin todettiin, että systeemin ulostuloon y(t) vaikuttavat u(s) ja w(s), s<t
  - Olisi kovin kömpelöä tallettaa u(s) ja w(s) kokonaisuudessaan
- Systeemin (tai mallin) <u>tila</u> x(t) on sellainen informaatio, jonka tunteminen yhdessä u(t):n ja w(t):n kanssa mahdollistaa systeemin ulostulon y(τ) laskemisen jollekin τ>t
- Käytännössä tilalla on tärkeä merkitys esim. simuloinnissa: se on suoraan kullakin aika-askelella talletettava informaatio



input-output-kuvaus
(external model)



tilamalli
(internal model)

Esitysten ero

- Input-output -kuvaus ei ota kantaa systeemin sisäiseen rakenteeseen
- Klassisen säätöteorian perusta siirtofunktiolla ilmaistun lineaarisen input-output -kuvauksen analyysi taajuustasossa
- Tilayhtälöesitys ”moderni” lähestymistapa
  - OR:n synty 1950-luvulla
  - mahdollisti mm. tilatakaisinkytkennän, optimisäädön, monimuuuttujasäädön ja epälineaaristen mallien käsittelyn sekä laajensi lineaaristen järjestelmien teoriaa merkittävästi

Input-output -kuvaus ja tilayhtälömalli

- Yleinen jatkuvan ajan <u>input-output-kuvaus</u> on muotoa

$$g(y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t),\ldots,y(t), u^{(m)}(t),\ldots,u(t))=0,$$

  missä (a) viittaa a:nteen derivaattaan ja g on jokin epälineaarinen funktio (SISO)
- Muunnetaan 1. kertaluvun differentiaaliyhtälösysteemiksi asettamalla $x_i(t):=y^{(i-1)}(t)$, $i=1,\ldots,n$
- Saadaan <u>tilayhtälömalli</u>

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = h(x(t), u(t))$$

  jossa dim $x(t)=n$, dim $u(t)=m$, dim $y(t)=p$
- x(t) on mallin <u>tila,</u> n on mallin <u>kertaluku</u>

Lineaarinen input-output -kuvaus ja tilayhtälömalli

- Yleinen jatkuvan ajan n. kertaluvun lineaarinen (SISO) input-output-kuvaus on muotoa
  $a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + y(t) = b_{m'} u^{(m')}(t) + \ldots + b_0 u(t)$,
  missä $n \geq m'$ ja (a) viittaa a. derivaattaan
- Muunnetaan 1. kertaluvun differentiaaliyhtälösysteemiksi asettamalla $x_i(t) \coloneqq y^{(i-1)}(t), i = 1, \ldots, n$ ja tekemällä tarvittaessa muita kikkoja
- Lineaarinen tilayhtälömalli
  $$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
  $$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
  - $\dim A = n \times n$ (systeemimatriisi / system matrix)
  - $\dim B = n \times m$ (ohjausmatriisi / control matrix)
  - $\dim C = p \times n$ (lähtömatriisi / ouput matrix)
  - $\dim D = p \times m$ (suoravaikutusmatriisi / feedworward matrix)

Tasapainotilan ratkaisut

- Valitaan $u(t)=u_0$ (vakio); mihin $x(t)$ ja $y(t)$ asettuvat?
- x_0: $f(x_0,u_0)=0$
  - yksi, useita tai ei yhtään ratkaisua
- (x_0,u_0) on <u>tasapainopiste</u> (stationary point)
  - usein toivottavaa saada systeemi tasapainotilaan
- Vastaavasti tasapainotilan ulostulo on $y_0=h(x_0,u_0)$
- (Tasapainopiste on asymptoottisesti stabiili ⇔ $y(t)$ konvergoi y_0:aan)
- Konvergenssinopeutta kuvaa <u>aikavakio</u>
  - usein mielenkiinnon kannalta nopeat tilat voidaan korvata staattisilla approksimaatioilla
- <u>Staattinen vahvistus</u> = y_0:n herkkyys muutokselle u_0:ssa eli $g'(u_0)$; $y_0=h(x_0(u_0),u_0)=g(u_0)$

Laplace-muunnos

- Funktion $f(t)$ ($f(t) = 0$, kun $t < 0$) Laplace-muunnos on
  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$
  missä s on kompleksimuuttuja (”taajuus”)

<u>Funktio</u>	<u>L-muunnos</u>
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
…	…

- Dynaamisten systeemien yhteydessä tyypillisesti oletetaan
  $$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = 0$$
  – ”linearisoidun mallin alkutila = tasapainopiste/linearisointipiste”
  => tilan poikkeama tasapainosta = 0
- Muista: $f^{(n)}(t) \Rightarrow s^n F(s)$

Siirtofunktio

- Yleinen jatkuvan ajan lineaarinen input-output-kuvaus
  $a_n y^{(n)}(t) + \cdots + y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_0 u(t),\ n \geq m$
- Laplace-muunnetaan puolittain =>
  $$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + 1} U(s)$$
  Osamäärää kutsutaan systeemin siirtofunktioksi $G(s)$
- Dynaamisten systeemien eräs mallityyppi
- Algebrallinen yhtälö (vrt. differentiaaliyhtälö)
- Kompleksiarvoinen kompleksimuuttujan funktio
  - Taajuustaso(Laplace-taso)malli (vrt. aikatasomalli)
- Siirtofunktion nimittäjäpolynomin nollakohtia kutsutaan siirtofunktion navoiksi

Lineaarista tilayhtälömallia vastaava siirtofunktio

- Lineaarinen tilayhtälömalli

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

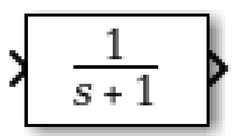
- Laplace-muuntamalla saadaan

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- Algebralista vääntöä…

$$G(s) = \frac{(\dots)}{(\dots\det(sI - A)\dots)}$$

- Siirtofunktion navat yhtyvät A:n ominaisarvoihin
- Simulink: Transfer Fcn



Lineaarisen jatkuva-aikaisen systeemin stabiilisuus

- Asymptoottinen stabiilisuus vs. stabiilisuus:
  - lokaali, globaali
- Lin. järjestelmälle stabiilisuus on systeemin ominaisuus joka ei riipu toiminta-alueesta tai tulosuureista
- Siirtofunktion G(s) välittämä input-output -kuvaus on globaalisti asymptoottisesti stabiili joss nimittäjäpolynomin nollakohdat (so. siirtofunktion *navat*) sijaitsevat aidosti kompleksitason vasemmassa puoliskossa
  - kuvaus on stabiili jos jotkin navat ovat im-akselilla ja ne ovat yksinkertaisia
- Huom. Laplace-muuntamalla tilayhtälö saadaan

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

eli navat yhtyvät A:n ominaisarvoihin

Linearisointi

- Tarkastellaan epälineaarista järjestelmää tasapainopisteessä (x_0,u_0) sekä poikkeamia $\Delta x(t)=x(t)-x_0$, $\Delta y(t)=y(t)-y_0$ ja $\Delta u(t)=u(t)-u_0$
- pätee:

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t) \approx A'\Delta x(t) + B'\Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) \approx C'\Delta x(t) + D'\Delta u(t)$$

missä

$$A' = \frac{\partial f}{\partial x}, B' = \frac{\partial f}{\partial u}, C' = \frac{\partial h}{\partial x}, D' = \frac{\partial h}{\partial u}$$

laskettuna (x_0,u_0):ssa

- Lisätietoa app. B kirjassa

Diskreettiaikainen lineaarinen järjestelmä

- $a_n y(t+n) + \cdots + y(t) = b_m u(t+m) + \ldots + b_0 u(t), n \geq m$
- Input-output -kuvauksen siirtofunktioesitys

$$Y(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + 1} U(z)$$

- Tilayhtälöesitys: otetaan tiloiksi viivästetyt y:n ja u:n arvot

$$x(t_{k+1}) = Ax(t_k) + Bu(t_k)$$
$$y(t_k) = Cx(t_k) + Du(t_k)$$

- Asymptoottinen stabiilisuus: siirtofunktion navat (A:n ominaisarvot) yksikköympyrän sisäpuolella
  - stabiilisuus: napoja yksikköympyrällä

Diskretointi

- Olkoon annettuna jatkuva-aikainen malli

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = h(x(t), u(t))$$

- ja tarkastellaan diskreettiaikaista mallia

$$x(t_{k+1}) = F(x(t_k), u(t_k))$$
$$y(t_k) = H(x(t_k), u(t_k))$$

- Miten F ja H tulisi valita, jotta diskreettiaikainen malli kuvaisi diskretointipisteissä jatkuva-aikaista mallia mahdollisimman hyvin?
- Euler, Runge-Kutta –menetelmät, yms...

Lineaarisen mallin diskretointi

- Oletetaan ohjaus aika-askelella vakioksi/lineaariseksi ja ratkaistaan tilayhtälö => diskreetin mallin systeemi- ja ohjausmatriisit
  - joudutaan laskemaan matriisieksponentti ja sen integraali
- Lue kpl 3.9 ja app. A
- Harjoitustyö 1
  - tässä puhutun hands on -sovellus

Sananen p:stä, s:stä, z:sta, q:sta ja q^{-1}:stä

- s on Laplace-tason muuttuja - p on derivointioperaattori aikatasossa
  - $sF(s)=L\{f'(t)\}$, $pf(t)=f'(t)$
- G(s) on Laplace-tason olio - G(p) on operaattoripolynomi
  - G(s) operoi U(s):ään, G(p) u(t):hen
- z on z-tason muuttuja – q on eteenpäinsiirto-operaattori – q^{-1} on taaksepäinsiirto-operaattori aikatasossa
  - $z^{-1}Y(z)=Z\{y(t_{k-1})\}$, $qy(t)=y(t_{k+1})$, $q^{-1}y(t)=y(t_{k-1})$
  - G(z) on z-tason olio joka operoi U(z):aan – G(q) ja $G(q^{-1})$ ovat aikatason operaattoripolynomeja jotka operoivat u(t):hen
- Huomaa erityisesti, että diskreettiaikaisen järjestelmän stabiilisuustulos koskee z:n (tai q:n) polynomeja
  - usein käytetään myös merkintää $G^*(z^{-1})$ tai $G^*(q^{-1})$!