①

Esim: Input-output-kuvaus ja tilaesitys

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{u} \quad (\mathrm{I})$$

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dot{y} - y + \dot{u} = -x_1 - x_2 + \dot{u} \end{cases} \to \text{ongelma}$$

Derivointioperaattori p: $p = d/dt$

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow p^2 y + py + y = pu$$

[p:t yhteiseksi tekijäksi]

$$\Leftrightarrow p(\underbrace{py + y - u}_{x_2}) = -y$$

$y \to x_1$ (valitaan)

eli $\dot{x}_2 = -y \; (\mathrm{II})$

$$\begin{cases} x_1 = y \overset{\mathrm{II}}{\Rightarrow} \dot{x}_2 = -x_1 \\ x_2 = py + y - u = \dot{y} + y - u = \dot{x}_1 + x_1 - u \Rightarrow \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad u = [u]$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{[0]}_{D} u$$

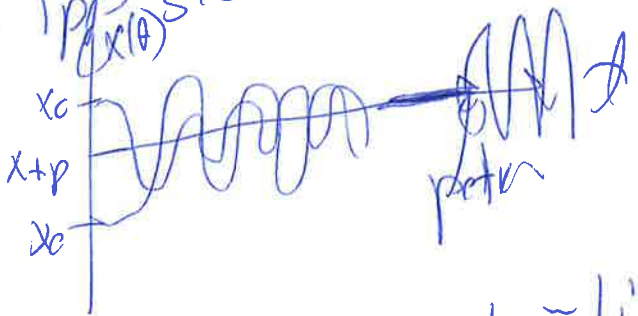
- Lineaarisen mallin ratkaisu suljetussa muodossa laskea pelkästään
- kun u ja x(0) annettu, niin graafi- käsittelemään ratkaisun
- Aikainvariantti, vs aikavariantti

② ~~3~~ Stabiilisuudesta

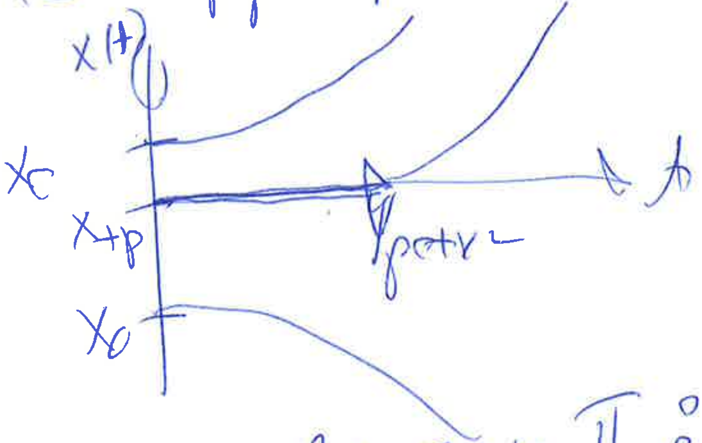
Liittyy tp-pisteeseen (x_{tp}, u_{tp}).

(I) Tpp asymptoottisesti stabiili

(II) Tpp stabiili



(III) Tpp epästabiili



- Lokaali I ja II: Edellä kuvattu käyttäytyminen syntyy vain lähellä x_{tp}:tä olevista alkutiloista x(0)
- Globaali I ja II: x(0) saa olla mielivaltainen

Jos olla tpp:ssä, niin siellä pysytään pisteessä tpp:n lähistöllä.

3A 4 (3)

Lineaarisen systeemin stabiilisuudesta

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ 0 = Ax_0 + Bu_0 \end{cases}, \quad u_0 = \text{vakio}, \ (x_0, u_0) \text{ TPP} \Rightarrow x_0 = -A^{-1}Bu_0 \text{ ja } y_0 = [-CA^{-1}B + D]u_0$$

Huom! Staattinen vahvistus

- esim. origo on TPP
- Huom! Kaikki ei ole tasapainotiloja!

Lemma 3

$\dot{x} = Ax + Bu_0$, $x \in \mathbb{R}^2$, $x(0)$ annettu

Bu_0 = vakio

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \text{vakio } 1 \\ x_2(t) = \beta_1 e^{\lambda_1 t} + \beta_2 e^{\lambda_2 t} + \text{vakio } 2 \end{cases}$$

missä λ_i ovat A:n ominaisarvot

eli $\det(\lambda I - A) = 0$

$\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$

Eulerin kaava $e^{\lambda t} = e^{Re(\lambda)t}[\cos(Im(\lambda)t) + i \sin(Im(\lambda)t)]$

HUOM! Esimerkkitapaus: jos $Re(\lambda_i) = 0$ ja on useampikertainen niin λ_i epästabiili

- $Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i \Rightarrow$ asympt. stab.
- $Re(\lambda_i) \leq 0 \ \forall i$ ja $\exists i$ s.e. $Re(\lambda_i) = 0$ $\Rightarrow$ stab.
- $\exists i$ s.e. $Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow$ epästab.

Huom! Reaaliosat kertovat kompleksisten ominaisarvojen käyttäytymisen, i-osat heilunnan

Huom! - Lineaarisessa tapauksessa on systeemin stabiilisuus ominaisuus! ("Ei pisteiden, niin sillä ei ole saa")
- Epälin. syst. stabiilisuus pitää tutkia kaikkien TPP:iden kohdalla!

Huom! Epälin. syst. tarkastellen!

3B 14

Esim 2: siirtofunktio

$\ddot{y}+\dot{y}+y=\dot{u}$ | L-muunnos

$s^2Y(s)+sY(s)+Y(s)=sU(s)$ ⇔

$Y(s)[s^2+s+1]=sU(s)$

$Y(s)=\underbrace{\frac{s}{s^2+s+1}}_{G(s)}U(s)$ → $G(s)$ siirtofunktio

L-muunnos on lineaarinen operaattori

Huom! Alkutilat nollia.

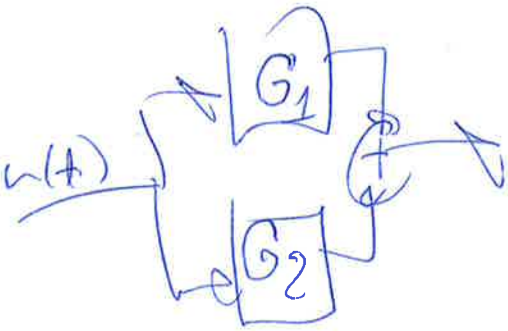
- Dynaamisen systeemin malli
- Algebrallinen yhtälö
- Kompleksiarvoinen kompleksimuuttujan funktio
- Laskeminen $u(t)$ → $f(t)=\ldots$, $f'(t)=\ldots$, ... ensin

  ⇔ L-muunnos ⇒ $Y(s)$ ⇔ käänteinen L-muunnos (kompleksi-integraali) ⇒ $y(t)$

Huom! Helppo muodostaa koko systeemin G, kun tiedetään osasysteemien G:t

$G=G_1\cdot G_2$

"sarjaan"



$G=G_1+G_2$

"rinnan"

$p=d/dt$

$G(p)=\frac{p}{p^2+p+1}$

$y(t)=G(p)u(t)$

⇔

$\ddot{y}+\dot{y}+y=\dot{u}$

(3C) (5) Esim 3 lin. syst. stabiilisuus

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0,$$

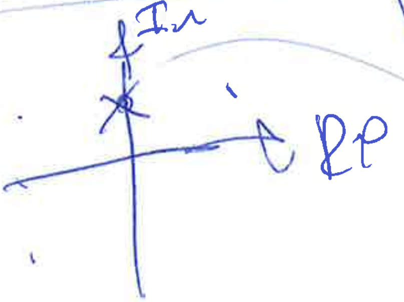
j.e., $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow$ Asympt. stab. systeemi

vrt. $G(s) = \dfrac{s}{s^2+s+1}$ eli navat

saadaan yhtälöstä

$s^2+s+1 = 0$ eli $s = \lambda$



"0" "$t \to \infty$" $\Rightarrow$ as. stab.

7 Linearisointi

$\dot{x} = f(x, u)$ ja (x_0, u_0) tpp eli $f(x_0, u_0) = 0$

Taylorin sarja pisteessä (x_0, u_0)

$$f(x, u) = f(x_0, u_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0)\underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x} + \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)\underbrace{(u - u_0)}_{\Delta u}$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ f_2(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \\ \vdots \\ x_n - x_n^0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

stabiilisuus, tasapainotila

A Jacobin matriisi

$\Delta x = x - x_0 \quad \big| \frac{d}{dt}$

$\Delta \dot{x} = \dot{x} = f(x, u)$

$\Delta \dot{x} = f_x(x_0, u_0)\Delta x + f_u \Delta y$

$$y = g(x, u) = \underbrace{g(x_0, u_0)}_{y_0} + \underbrace{g_x^{(x_0, u_0)} \Delta x + g_u^{(x_0, u_0)} \Delta u}$$

$\Delta y = y - y_0$

$\Delta y =$

Ensi viikolla / luento 3

Saa tarina jatkuu

Diskreetiaika ajassa!