① I Luento 3 - Diskreettiaikaiset dynaamisten systeemien mallit:
input-output -kuvaus ja tilaesitys

Esim. 1: Input-output-kuvaus (4) m

$t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$a_2 y(t+2) + a_1 y(t+1) + y(t) = \cancel{b_1 u(t+1)} + b_0 u(t)$$

alkuehdot: $y(0)$ = --, $y(1)$ = --

(2) 2. kertaluku | (1) $a_0 = 1$ | (3) $n \geq m$, nyt $2 \geq 1$!

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = y(t+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = y(t+2) = -\frac{a_1}{a_2} x_2(t) - \frac{1}{a_2} x_1(t) + \frac{b_0}{a_2} u(t) \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad u(t) = [u(t)]$$

$$x(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/a_2 & -a_1/a_2 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ b_0/a_2 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[1 \quad 0]}_{C} x(t) + \underbrace{[0]}_{D} u(t)$$

- systeemimatriisi A
- ohjausmatriisi B
- ulostulomatriisi C
- suoravaikutusm. D

$x_1(0)$ ja $x_2(0)$ ja $u(t)$ annettu $\Rightarrow$ yksikäsitteinen ratkaisu.

Lin. diskr.aik. dyn. syst. tp:t ja stab.

$$x(t+1) = A x(t) + B u(t)$$
$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

- Olkoon (x_0, u_0) tp-piste, ja u_0 annettu

$x_0 = A x_0 + B u_0 \Rightarrow (I - A) x_0 = B u_0 \Rightarrow x_0 = (I - A)^{-1} B u_0$

ja $y_0 = [C(I-A)^{-1} B + D] u_0$

- kuten jatkuvassa ajassa: aiemmat tarkastelut ... määritellään tp:t (?) ja tppisteelle!
- stabiilisuustyypit kuten jatkuvassa ajassa!

(2)

Jva-aika: perusratkaisu $\sim \rho_i^t$,

Diskreettiaika: — " — λ_i^t

jossa λ_i A:n ominaisarvot (tai Q:n navat) $[\det(\lambda I - A) = 0]$

- $|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow$ asymptoottisesti stabiili
- $\exists i$ s.e. $|\lambda_i| > 1 \Rightarrow$ EPÄ-stabiili
- $|\lambda_i| \leq 1 \ \forall i$ ja $\exists i$ s.e. $|\lambda_i| = 1$ ym. $\Rightarrow$ stabiili

Erikoistapaus $|\lambda_i| = 1$ ja λ_i moninkertainen $t(\pm 1)^t \Rightarrow$ epä. stab.

Vrt. $x(t+1) = \alpha x(t)$, $x(t) = x(0)\alpha^t$ (Tämä ~~Rp-laus~~ ja konkreettinen!)

Kannattaa linearisointi ja epälineaarisen systeemin stabiilisuutta!

Z-muunnos

$f(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ $f(t) = 0$, kun $t = -1, -2, -3, \ldots$

$$F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t}$$

kompleksimuuttuja

Aikafunktio	Z-muunnos
$f(t)$	$zF(z) - zf(0)$
$f(t+1)$	$z^2 F(z) - z^2 f(0) - z f(1)$
jne.	jne.

ei siis s

olet. $f(0) = f(1) = \cdots = 0$

Muista: $Z(t+n) = z^n F(z)$

(Käänteinen z-muunnos: kompleksinen pelkkä integraali! Huom! Differenssiyhtälön ratkaiseminen laskeminen!)

③ Esim 2. Siirtofunktio

$$a_2 y(t+2) + a_1 y(t+1) + y(t) = b_0 u(t) \quad \Big| \cdot \text{z-muunnos}$$

$$a_2 z^2 Y(z) + a_1 z Y(z) + Y(z) = b_0 U(z)$$

$$Y(z) = \frac{b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + 1} U(z) \rightarrow G(z) \text{ siirtofunktio}$$

- pulssinsiirtofunktio / kompleksi carvi dn
- Algebrallinen yhtälö / kompleksimuuttujan funktio

~~q~~ : Eteenpäinsiirto-operaattori q

$$q f(t) = f(t+1)$$

$$G(q)u, \quad y(t) = G(q)u(t)$$

$\sim$

$$x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^m, \; y \in \mathbb{R}^n$$

$$\left.\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Bx(t) + Bu(t) \end{aligned}\right| \text{Z-muunnos}$$

$$\begin{cases} zX(z) = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = BX(z) + BU(z) \end{cases} \rightarrow X(z) = \underbrace{(zI-A)^{-1}}BU(z) = \dots = \frac{\dots}{\dots \det(zI-A) \dots}$$

vrt. A:n ominaisarvot

$\rightarrow$ A:n ominaisarvot = G:n navat !