Lineaaristen järjestelmien teoriaa

- Saavutettavuus, ohjattavuus
- Tarkkailtavuus, havaittavuus
- Klassisen mekaniikan stabiilisuus vs. systeemitekninen stabiilisuusuus
- Tilaestimointi/tilatarkkailu
- Kalman-suodin

Mielenkiintoisia kysymyksiä

- Onko systeemi rakenteeltaan sellainen, että sitä voidaan hallita? (=> saavutettavuus/ohjattavuus)
- Tarvitseeko systeemi erityistä hallintaa? (=> stabiilisuus)
- Miten sitä hallitaan? (=> säätöteoria/-tekniikka)
- Miten hallitaan parhaalla mahdollisella tavalla? (=> optimisäätö)
- Mitä systeemin sielunelämästä voidaan sanoa? (=> tarkkailtavuus/havaittavuus)
- Miten sielunelämää havaitaan? (=>tilahavaitseminen)
  - Kalman-suodin

Ohjattavuuden ja saavutettavuuden määritelmät

- Systeemin hallittavuuden karakterisointi

Systeemi **ohjattava**

$\Leftrightarrow$

On olemassa ohjaus, jolla systeemi saadaan mielivaltaisesta alkutilasta origoon äärellisessä ajassa

Systeemi **saavutettava**

$\Leftrightarrow$

On olemassa ohjaus, jolla systeemi saadaan mielivaltaisesta alkutilasta mihin tahansa tilaan äärellisessä ajassa

- Ohjattavuus ei takaa saavutettavuutta, mutta saavutettava järjestelmä on aina myös ohjattava

Saavutettavuuden testaaminen

- Epälineaarisille systeemeille vaikeaa
- Lineaariset systeemit: Aikainvariantti lineaarinen systeemi

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

on saavutettava, jos ja vain jos n x nm-matriisin

$$Q_c = [B \,|\, AB \,|\, A^2B \,|\, \ldots \,|\, A^{n-1}B]$$

rangi on n (n=dim x, m=dim u)

- Rangi = lineaarisesti riippumattomien rivien/sarakkeiden lukumäärä
- Q_c on ns. ohjattavuusmatriisi
- Pätee myös diskreettiaikaisille systeemeille

Saavutettavuuden tulkinta

- Tarkastellaan diskreettiaikaista systeemiä

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Oleteaan, että alkutila x_0 annettu
- Tila ajanhetkellä n (n systeemin kertaluku) on

$$x(n) = A^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} Bu(k) = A^n x_0 + Q_c \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

- Jos ohjattavuusmatriisin rangi on n, niin jokainen R^n:n vektori x voidaan esittää muodossa $x = A^n x_0 + Q_c \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$ eli sopvivalla ohjausten valinnalla systeemi saadaan alkutilastaan x_0 haluttuun tilaan x(n)
- Ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, jos ohjauksia on enemmän kuin yksi

Tarkkailtavuuden ja havaittavuuden määritelmät

- Voidaanko systeemin tila rekonstruoida ulostulosta?

Järjestelmä **tarkkailtava**

$\Leftrightarrow$

On mahdollista määrittää alkutila x_0 havaintojen ($y(t)$, $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$) perusteella

- Systeemi on **havaittava**, jos sen ei-tarkkailtavat tilat ovat stabiileja
- Tarkkailtava systeemi on myös havaittava, mutta ei toisinpäin!

Tarkkailtavuuden testaaminen

- Epälineaarisille systeemeille ei yleisiä keinoja
- Lineaariset systeemit: Aikainvariantti lineaarinen systeemi

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

on tarkkailtava, jos ja vain jos n x pn-matriisin

$$Q_o = [C^T \mid A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \ldots \mid (A^T)^{n-1} C^T]$$

rangi on n (n=dim x, p=dim y), $(()^T$ on transponointi)

- Q_o on ns. tarkkailtavuusmatriisi
- Pätee myös diskreettiaikaisille systeemeille

Tarkkailtavuuden tulkinta

- Tarkastellaan diskreettiaikaista systeemiä

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Oletetaan, että $u(t)=0$ ja että ulostulot $y(0), y(1), \ldots, y(n-1)$ (n systeemin kertaluku) annettu
- Saadaan ulostulojen joukko $y(0)=Cx(0)$, $y(1)=Cx(1)=CAx(0)$, …, $y(n-1)=Cx(n-1)=CA^{n-1}x(0)$
- Matriisimuodossa $\begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix}$
- Jos tarkkailtavuusmatriisin rangi on n, niin yo. yhtälö määrää x_0:n annetuilla C, A ja $y(t)$, eli alkutila x_0 voidaan määrittää!

Stabiilisuudesta edelleen

- Klassisen mekaniikan stabiilisuuskäsitys; tasapainosta häirityn systeemin käyttäytyminen
  - systeemimatriisin ominaisarvot / siirtofunktion navat vasemmassa puolitasossa / yksikköympyrän sisäpuolella => asymptoottisesti stabiili systeemi
  - ominaisarvoja / siirtofunktion napoja imaginaariakselilla (ei useampikertaisia) / yksikköympyrällä (ei useampikertaisia) => stabiili systeemi
- Systeemitekninen stabiilisuus:
  - rajoitetut sisäänmenot saavat aikaan rajoitettuja ulostuloja
  - pienet muutokset sisäänmenoissa saavat aikaan pieniä muutoksia ulostuloissa

  = sisäänmeno-ulostulo –stabiilisuus

  = BIBO-stabiilisuus (Bounded Input, Bounded Output)

Yhteys stabiilisuuksien välillä

- Systeemi asymptoottisesti stabiili

  =>

  Systeemi sisäänmeno-ulostulo –stabiili

- Systeemi sisäänmeno-ulostulo –stabiili sekä saavutettava ja tarkkailtava

  =>

  Systeemi asymptoottisesti stabiili

Tilaestimointi ja tilatarkkailu

- Tilan mittaaminen kallista, mahdotonta => konstruoidaan tilatarkkailija => estimaatti tilalle
  - käyttö esim. tilatakaisinkytkennässä
- Määritä systeemin (sisäinen) tila ulostulon ja/tai systeemin mallin avulla
- Ongelmana prosessi- ja mittauskohina => Kalman-suodin
  - keino yhdistää optimaalisesti malli ja mittaus

Tilaestimoinnin vaihtoehdot

1. **Datan perusteella**
2. **Mallin perusteella**
3. **Datan ja mallin perusteella**

Esimerkki:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Mekaaninen järjestelmä, x_1=paikka, x_2=nopeus, ulostulona paikka. Miten voidaan laskea nopeus?

1. Derivoi paikkadata (kohina!)
2. Syötä x_0 ja u järjestelmän malliin, katso miten x_2 kehittyy (tuntemattomat häiriöt virhelähteenä)
3. Ennusta tila mallilla, korjaa ennustetta paikkadatalla

Tilaestimaattori - Määritelmä

- Tarkastellaan lineaarista (kohinatonta) systeemiä

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Systeemi

$$\dot{v}(t) = Fv(t) + Gy(t) + Hu(t)$$
$$z(t) = Mv(t) + Ny(t) + Pu(t)$$

on yo. järjestelmän **tilaestimaattori** tai **tarkkailija**, jos mielivaltaisella alkutilalla $x(t_0)$ on olemassa alkutila v_0 s.e. jos $v(t_0)=v_0$ niin $z(t)=x(t)$ kaikilla $t > t_0$ ja kaikilla u

– tavallisesti pyritään muodostamaan niin, että itse v on tilan estimaatti

Täyden kertaluvun tarkkailija

- Systeemi

$$\dot{\hat{x}}(t) = F\hat{x}(t) + Gy(t) + Hu(t), \hat{x} \in R^n$$

  on ed. järjestelmän **täyden kertaluvun tarkkailija**,

  jos ehdosta $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ seuraa $\hat{x}(t) = x(t)$ kaikilla $t > t_0$ ja kaikilla u
- Jos dimensio on pienempi, puhutaan **redusoidun kertaluvun tarkkailijoista**
- Yo. tarkkailija on em. systeemin tarkkailija, jos F=A-LC, G=L, H=B-LD
  - L mielivaltainen matriisi

..tarkkailija

- Tällöin tarkkailija on

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t))$$

- Viimeistä sulkulauseketta kutsutaan **innovaatioksi**
  - mittauksen ja mallin ulostulon erotus
- <u>Tarkkailijan suunnitteluongelma</u>: Valitse L
  - eli valitse miten innovaatio huomioidaan
- Tilahavaitsijan systeemimatriisi on A-LC
  - valitsemalla L sopivasti saadaan tilahavaitsijalle mielivaltainen dynamiikka <u>edellyttäen että systeemi on tarkkailtava</u>

Esimerkki

- Tark. mekaanista järjestelmää

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0]x(t)$$

- ja tilatarkkailijaa

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t) - \cancelto{0}{Du(t)})$$

- Valitaan L=[l_1 l_2]' vaikka siten että systeemimatriisin (A-LC) ominaisarvot ovat vaikka -5:ssä... => [l_1 l_2]'=[8 4]'

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -9 & -2 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} y(t)$$

Kalman-suodin 1/2

- Edellä on oletettu, että systeemit ja mittaukset ovat kohinattomia
- Miten tila olisi estimoitava, kun systeemi on stokastinen?
- Tarkastellaan lineaarista diskreettiaikaista systeemiä

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + v(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + e(t)$$

missä

Cov(v(t))=R_1, Cov(e(t))=R_2 , v(t) ja e(t) valkoista, keskenään riippumatonta kohinaa

- v(t) prosessikohina, e(t) mittauskohina
- Nyt myös tila ymmärretään satunnaismuuttujaksi

Kalman-suodin 2/2

- Merkitään x^(t|t-1) a-priori-estimaatti ja x^(t|t) a-posteriori-estimaatti tilalle hetkellä t
- Ongelma:

  Konstruoi mittausten (u(s), y(s)), $t \geq s \geq \tau$ ja mallin avulla estimaatti x^(t|t) s.e. estimointivirheen kovarianssimatriisin jälki

  $P(t)=E[(x(t)-\hat{x}(t|t))^T(x(t)-\hat{x}(t|t))]$

  minimoituu
- Käytännössä
  - 1) A-priori-estimaatti tilayhtälöstä
  - 2) A-priori-estimaatin päivittäminen a-posteriori-estimaatiksi a-priori-estimaatin ja havaitun ulostulon (mittauksen) avulla

Tilaestimaatin ennustaminen ja päivittäminen

- Tilan a-priori-estimaatti (ennustus): x^(t|t-1)=Ax^(t-1|t-1)+Bu(t-1)
- Todellisen ja estimoidun mittauksen ero: y(t)-Cx^(t|t-1)
- Tilan a-posteriori-estimaatti (päivitys): x^(t|t)=x^(t|t-1)+K(t)(y(t)-Cx^(t|t-1))
- (Estimoitu ulostulo y^(t)=Cx^(t|t))
- Ns. Kalman-vahvistus K(t) määrittää, kuinka paljon painotetaan mittausta ja kuinka paljon estimaattia
  - riippuu mittauksen ja estimaatin luotettavuudesta
  - Kalman-vahvistus lasketaan tilan estimointivirheen kovarianssimatriisin P avulla
  - P:n laskennassa myös ennustus- ja päivitysvaiheet

Kalman-suotimen kaavat

- Tilan ennakointi $\hat{x}(t|t-1)=A\hat{x}(t-1|t-1)+Bu(t-1)$
  - tarvitaan alkuarvo $\hat{x}(0|0)=\hat{x}_0$
- Tilan estimointivirheen kovarianssimatriisin ennakointi

  $P(t|t-1)=AP(t-1|t-1)A^T+R_1$
  - tarvitaan alkuarvo $P(0|0)=P_0$
- Kalman-vahvistus

  $K(t)= P(t|t-1)C^T[CP(t|t-1)C^T+R_2]^{-1}$
- Tilaestimaatin päivitys

  $\hat{x}(t|t)=\hat{x}(t|t-1)+K(t)(y(t)-C\hat{x}(t|t-1))$
- Tilan estimointivirheen kovarianssimatriisin päivitys

  $P(t|t)=P(t|t-1)-K(t)CP(t|t-1)$
- Näin toimimalla virheen kovarianssimatriisin jälki minimoituu!!!!

Tulkinta, käytäntö

- Rekursiivinen algoritmi
  - viimeisin mittaus riittää
  - kovarianssimatriisi säilyttää laskennan kannalta tärkeän informaation
- Kalman-suodin yhdistää mittausdatan ja mallin antaman informaation niiden luotettavuuden suhteessa
  - luotettavuuden mittareita kohinoiden kovarianssit (skaalattuna prosessi- ja ulostulodynamiikoilla)
  - ”suuri” R_2 => ”pieni” vahvistus
- Käytännössä tarvitaan prosessi- ja mittauskohinan kovariansseille estimaatit
  - järkeily
  - mittaukset
  - usein B=0 (koska eihän estimoija tyypillisesti voi tietää ohjausta u(t)) ja u(t) kuvataan Cov(v(t))=R_1 avulla – vrt. harjoitustyö nro 2