Dynaamisten systeemien identifiointi 1/2

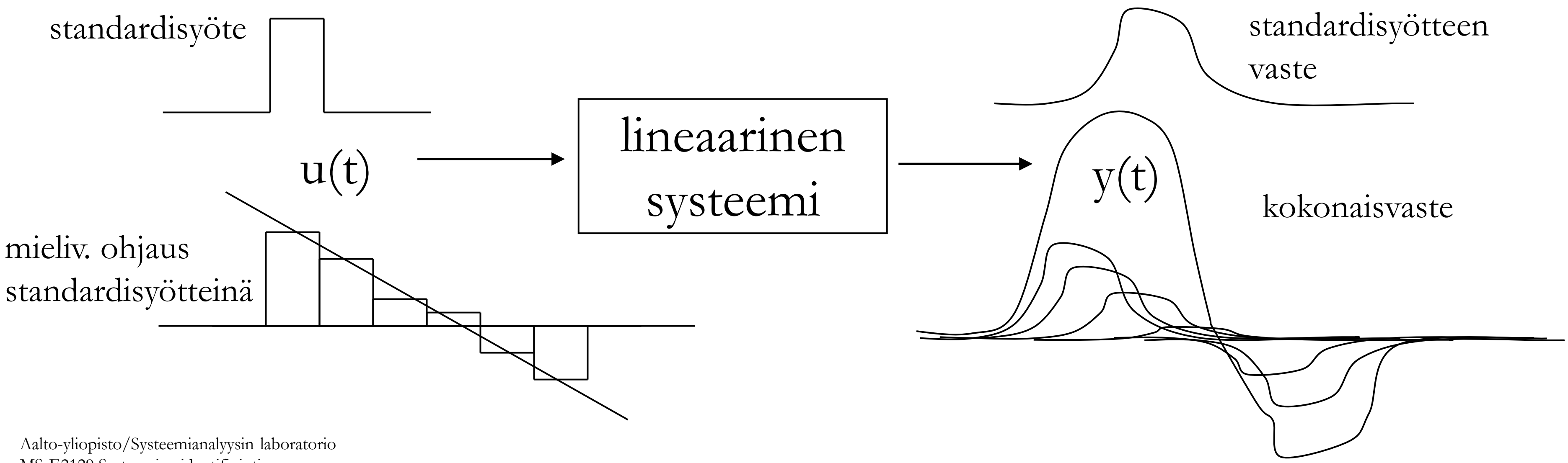
- Mallin rakentaminen mittausten (=input-output-data) avulla
- Epäparametriset menetelmät:
  - tuloksena malli, joka ei perustu parametreille – impulssi-, askel- tai taajusvaste
  - siirtofunktion estimointi (parametrinen malli) vasteiden perusteella
- Transienttianalyysi:
  - impulssivaste, askelvaste
- Korrelaatioanalyysi:
  - impulssivaste sisäänmenon ja ulostulon ristikovarianssin avulla
- Taajuusanalyysi:
  - systeemin vaste syötteeseen A$\sin\omega t$ eri ω:lla => taajuusvaste
- Fourier-analyysi:
  - taajusvaste sisäänmenon ja ulostulon Fourier-muunnosten avulla
- Spektraalianalyysi:
  - taajuusvaste sisäänmenon ja ulostulon spektrien avulla

Dynaamisten systeemien identifiointi 2/2

- Mallin rakentaminen mittausten (=input-output-data) avulla
- Parametriset menetelmät:
  - Mallirakenteen valinta
  - Parametrien estimointi PNS- tai vastaavalla keinolla
  - Tärkeä ongelma koesuunnittelu
- Rakenteelliset mallit
  - Parametreillä a priori tulkinta & merkitys
- Black box-mallit
  - Parametrit vain laskennan/datan sovituksen apuvälineitä

Lineaaristen mallien superpositioperiaate

- Lineaariselle mallille L pätee superpositioperiaate:
  $L(\alpha u_1+\beta u_2)=\alpha L(u_1)+\beta L(u_2)$
- Hyödyntäminen identifioinnissa:
  - Määrätään systeemin vaste (jollekin) standardisyötteelle: impulssi, askel, sini,...
  - Lausutaan ohjaus u standardifunktioiden avulla
  - Kokonaisvaste saadaan summaamalla u:n komponenttien vasteet



Impulssivaste

- Tarkastellaan diskreettiaikaisia järjestelmää
- Standardisyöte = impulssi => {u}= 1,0,0,0,...
- Vastaava ulostulo = {y} = {h} = h(0),h(1),h(2),...
- Yleinen sisäänmeno {u}=u(0),u(1),u(2),... => vaste u(0)h(0), u(0)h(1)+u(1)h(0),u(0)h(2)+u(1)h(1)+u(2)h(0),... =>

$$y(t) = \sum_{k=0}^{t} h(t-k)u(k), t \geq 0$$

- h(k) on systeemin *impulssivaste* eli *painofunktio* (weighting function)
  - Impulssivaste on eräs systeemin malli
  - FIR (Finite Impulse Response): h(k)=0 kun k>M

Impulssivasteen yhteys siirtofunktioon

$$y(t)=\sum_{k=0}^{t} h(t-k)u(k), t \geq 0$$

Konvoluutiosumman z-muunnos on tulo

=> Y(Z)=H(Z)U(Z)

ja impulssin z-muunnos on ykkönen, i.e., U(Z)=1,

joten Y(Z)=H(Z)

Impulssivaste saadaan Z-käänteismuuntamalla siirtofunktio ja päinvastoin

Askelvasteen yhteys impulssivasteeseen

- Yksikköaskel: u(t) 0,t<0 ja 1, kun t>=0 =>ulostulo y(0)=h(0), y(1)=h(0)+h(1),y(2)=h(0)+h(1)+h(2),...

$\Rightarrow$ Askelvaste on impulssivasteen summa

$\Rightarrow$ Impulssivaste on askelvasteen differenssi

- Selvä myös superpositiomielessä: askel on impulssin summa (integraali) => askelvaste on impulssivasteen summa (integraali)
- Impulssivaste on askelvasteen derivaatta

Jatkuva-aikaiset järjestelmät

- Ajattelu kuten diskreettiaikaisissa järjestelmissä
  - Jako standardisyötteisiin (esim. paloittain vakio approksimaatio)
  - Δt-> 0 => yksikköimpulssi eli Diracin delta

$$\delta(0)=\infty,\ \delta(t)=0\ \forall t\neq 0,\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1$$

  - Käytännössä Δt ei ole nolla, mutta teoriassa kyllä!

$\delta(t)$ → lineaarinen systeemi → h(t)

Askelvasteen yhteys siirtofunktioon

- Kun systeemin painofunktio tunnetaan, vaste mielivaltaiselle ohjaukselle u(t) on konvoluutio

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau, t \geq 0 \quad \text{(I)}$$

- Konvoluution Laplace-muunnos on tulo

  (I) => Y(S)=H(S)U(S)

  ja impulssin (Diracin deltan) ykkönen, i.e., U(S)=1,

  joten Y(S)=H(S)

Impulssivaste saadaan Laplace-käänteismuuntamalla siirtofunktio ja päinvastoin

Transienttianalyysi

- Impulssi- ja askelvasteen identifiointi
- Käytännössä kvalitatiivinen malli
- Käyttö identifioinnin alkuvaiheessa:
  - Merkittävät sisäänmenot, systeemin aikavakiot ja -skaalat
  - Vasteen kvalitatiivinen luonne (värähtelevä, vaimennettu, vakio,...)
  - Systeemin kertaluku
- Hankalaa konstruoida parametrisiä malleja, mutta joskus toimii!
  - Häiriöt, mittausvirheet
  - Impulssin tuottaminen?
- Vertailu mallin validointivaiheessa

Impulssivasteen määritelmän avulla laskettu estimaatti

- Mieliv. ohjaus u(0),u(1),... => vaste y(0),y(1),...
- T mittausta: $y(0)=u(0)h(0)$

  $y(1)=u(1)h(0)+u(0)h(1)$

  $y(2)=u(2)h(0)+u(1)h(1)+u(0)h(2)$

  ...

  $y(T)=u(T)h(0)+\ldots+u(0)h(T)$

$\Rightarrow$ $y=Uh \Leftrightarrow \hat{h}=U^{-1}y$

- Käytännössä kohinaisia mittauksia => monta koetta systeemillä => monta havaittua vastetta y => h:n estimointi PNS-menetelmällä

Stokastiset signaalit aika-tasossa

- Lineaarinen diskreettiaikainen malli $w(t_k)=G(q)u(t_k)$, $t_k=kT$
  - Näytteenottoväli T
  - Näytteenottotaajuus 1/T, näytteenoton kulmataajuus $2\pi/T$
  - Nyquistin taajuus 1/2T, Nyquistin kulmataajuus π/T
- Asetetaan $u(t_k)=e(t_k)$, $e(t_k)$ valkoista kohinaa (white noise)
  - $e(t_k)$:t riippumattomia
  - Normaalijakautunut, odotusarvo 0 ja vakio varianssi
- Häiriön tuottava alijärjestelmä:

  $w(t)+d_1w(t\text{-}T)+\ldots+d_nw(t\text{-}nT)=c_0e(t)+c_1e(t\text{-}T)+\ldots+c_ne(t\text{-}nT)$,
- $w(t)$ on lineaarisesti suodatettua kohinaa
- Diskreettiaikainen stokastinen prosessi $\Leftrightarrow$ satunnaismuuttujien joukko $w(t_k)$, $t_k=kT$, $k=0,\pm1, \pm2, \pm3,\ldots$

Stokastisista prosesseista

- $w(t)+d_1w(t-T)+\ldots+d_nw(t-nT)=c_0e(t)+c_1e(t-T)+\ldots+c_ne(t-nT)$ on ns. ARMA-malli (ks. esim. ennustaminen ja aikasarjanalyysi):
  - AutoRegressive: selittäjinä edelliset arvot
  - MovingAverage: selittäjänä edelliset virhetermit
- Stokastisen prosessin realisaatio: mallin tuottamat numerot
- $w(t)$:n <u>odotusarvofunktio</u> on $m_w(t) = Ew(t)$
- $w(t)$:n <u>kovarianssifunktio</u> (autokovarianssi) $R_w(t,s)=E(w(t)-m_w(t))(w(s)-m_w(s))$
  - <u>Ristikovarianssifunktio</u> (autoristikovarianssi) $R_{wv}(t,s)=E(w(t)-m_w(t))(v(s)-m_v(s))$
- Prosessi on <u>stationaarinen</u>, jos sen tilastolliset (odotusarvo, varianssi ja kovarianssi) ominaisuudet eivät riipu t:stä
  - Stationaarisen $w(t)$:n <u>kovarianssifunktio</u> riippuu vain aikavälistä $\tau=t-s$, eli $R_w(\tau)=R_w(t,t-\tau)$, symmetrinen origon suhteen

Korrelaatioanalyysi

- Estimoi ilmpulssivaste g_k systeemin sisäänmenon ja ulostulon avulla
- Tarkastellaan systeemiä, jonka painofunktio on g_k ja johon vaikuttaa häiriö v(t) (valkoista kohinaan)
- Tällöin

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k u(t-k) + v(t), t \geq 0$$

- Olkoon u(t) stationaarinen nollakeskiarvoinen stokastinen prosessi kovarianssifunktiolla $R_u(\tau)$
- Oletetaan, että u(t) ja v(t) korreloimattomia
- **Wiener-Hopfin yhtälö**

$$R_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k R_u(\tau - k)$$

- u(t) on valkoista kohinaa => $R_{yu}(\tau) = \lambda g_\tau$

Käytännön laskutoimitukset

- Stationaarisille nollakeskiarvoisille prosesseille

$$\hat{R}_{yu}^{N}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t)u(t-\tau)$$

ja edelleen, kun u(t) on valkoista kohinaa

$$\hat{g}_{\tau}^{N} = \frac{1}{\lambda}\hat{R}_{yu}^{N}$$

- Yleensä u(t) ei ole valkoista kohinaa
  - Voidaan laskea estimaatti $R_u(\tau)$ ja ratkaista impulssivaste Wiener-Hopfin yhtälöstä
  - Parempi tapa on <u>valkaisusuodatus</u>

Valkaisusuodatus (prewhitening)

- Suodatetaan y(t) ja u(t) mielivaltaisella suotimella L(q):
  - $y_F(t)=L(q)y(t)$; $u_F(t)=L(q)u(t)$
- Lineaarisuus => sama impulssivaste=>

$$y_F(t)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k u_F(t-k)+v_F(t), t\geq 0$$

- Valitaan L(q) siten että $u_F(t)$ on niin valkoista kuin mahdollista
  - Usein käytetään yksinkertaista AR-mallia L(q)u(t)=e(t), kertaluku 4-8 ja PNS-sovitusta
  - Esimerkki laskari #7, tehtävä #5

Korrelaatioanalyysialgoritmi - CRA

1. Kerää $y(t)$ ja $u(t)$
2. Nollakeskiarvoista vähentämällä estimoidut keskiarvot
3. Valitse valkaisusuodin $L(q)$ ja muodosta $y_F(t)$ ja $u_F(t)$
4. Laske $u_F(t)$:n varianssin sekä $u_F(t)$:n ja $y_F(t)$:n ristikovarianssin estimaatit
5. Muodosta impulssivasteen estimaatti

- Esimerkki: Laskari #7, tehtävä #5

Yhteenveto korrelaatioanalyysista

- Tavoitteena painofunktio - lopputuloksena lähinnä kvalitatiivista tietoa
  - Siirtofunktion estimointi lopputuloksen perusteella?
- Ei vaadi erityisiä ohjauksia
- Huono signaali-kohina –suhde voidaan kompensoida kasvattamalla mittausaikoja
- Eräänä oletuksena sisäänmenon ja häiriön korreloimattomuus => korrelaatioanalyysi (tämä versio) ei toimi hyvin takaisinkytketyille järjestelmille!