

Taajuus-, Fourier- ja spektraalianalyysi

- Transientti- ja korrelaatioanalyysi tähtäävät impulssivasteen/askelvasteen mallintamiseen
 - Kuvaus aikatasossa
- Taajuus- Fourier- ja spektraalianalyysi tähtäävät systeemin taajuusominaisuuksien mallintamiseen:
 - Taajuusvaste
 - Kuvaus taajuustasossa
- Taajuusvaste = systeemin sisäänmenolle aiheuttama vahvistus ja vaihekulman muutos taajuuden funktiona:
 - Siirtofunktio $G(s) \Rightarrow s=i\omega \Rightarrow$ taajuusvaste (taajuusfunktio) $G(i\omega)$
 - Siirtofunktio $G(z) \Rightarrow z=e^{i\omega T} \Rightarrow$ taajuusvaste (taajuusfunktio) $G(e^{i\omega T})$
- Superpositioperiaate pätee edelleen:
 - Standardisyöte $A \sin \omega t$
 - Yhdistämiskeinona Fourier-sarja

Lineaarisen systeemin taajuusvaste

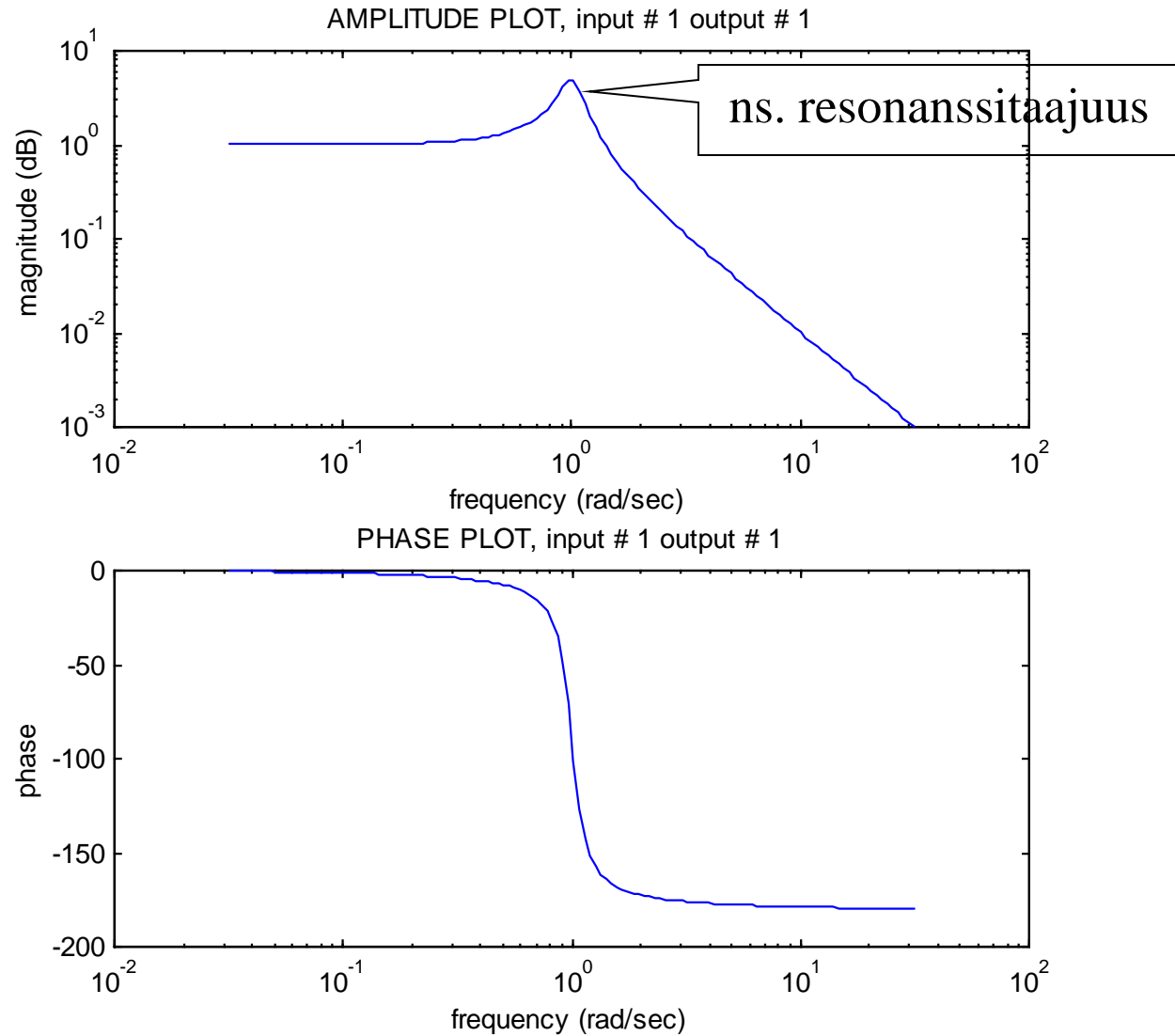
- Olkoon systeemin siirtofunktio $G(s)$, jonka navat vasemmassa puolitasossa, i.e., asymptoottisesti stabiili
- Valitaan sisäänmeno $u(t)=A\sin\omega t$; mitä tulee ulos?
- Voidaan osoittaa (ks. laskari #8 tehtävä #1 ja kotitehtävä #1), että kun alkutransientit ovat hävinneet, ulos tulee $B\sin(\omega t + \phi)$, jossa
 - $B=A |G(i\omega)|$
 - $\phi=\arg(G(i\omega))$
- **Taajuusanalyysi:** Mitataan B ja ϕ usealla eri ω
 \Rightarrow taajuusvaste

Boden diagrammi

- Vakiintunut tapa esittää taajuusvaste
- Piirretään amplitudisuhde $\log |G(i\omega)|$ (desibeleinä) ja vaihe-ero (asteina) $\arg(G(i\omega))$ (asteina) taajuuden (logaritminen asteikko) funktiona
- Vastaa näppärästi kysymykseen mitä tapahtuu mielenkiintoisilla taajuuksilla
- Approksimatiivinen piirto helppoa:
 - esim. sarjaankytkettyjen systeemien diagrammit voidaan laskea yhteen
 - $\log |G_1(i\omega)| + \log |G_2(i\omega)| = \log |G_1(i\omega)G_2(i\omega)|$
- Muita taajuusvasteen esitystapoja:
 - Nyquistin diagrammi
 - piirretään $G(i\omega)$ kompleksitasoon, kun $-\infty \leq \omega \leq \infty$
 - Nicholsin kartta
 - piirretään amplitudisuhde vaihe-eron funktiona

Esimerkki

- Toisen kertaluvun systeemin $G(S) = 1/(s^2+0.2s+1)$ Bode diagrammi
- Vrt. laskari #8 tehtävä #4



Taajuusanalyysin etuja & haittoja

- Helppo käyttää, ei tarvita erityisiä laskentavirityksiä
- Ei vaadita muita oletuksia systeemistä kuin lineaarisuus
- Kiinnostavat taajuusalueet helppo tutkia tarkemmin
- Tuloksena taulukko tai mittauspisteiden kautta kulkeva interpolaatio:
 - Ei sovellu simulointiin sellaisenaan
 - Siirtofunktion estimointi taajuusvasteen avulla?
- Reaalimaailman systeemeillä ei usein voida kokeilla täysin vapaasti
- Vaatii pitkiä mittausaikoja
 - Useita mitattavia taajuuksia
 - Mikäli kiinnostavat taajuudet matalia
- Häiriöt, mittausvirheet

Fourier-analyysi

- Taajusvaste sisäänmenon ja ulostulon Fourier-muunnosten avulla
- Perusajatus: $Y(\omega) = G(i\omega)U(\omega)$ (Fourier-muunnos)
 $\Rightarrow G(i\omega) = Y(\omega)/U(\omega)$
- $y(t)$ ja $u(t)$ tunnetaan äärellisellä välillä $[0, S]$
- Muodostetaan Fourier-muunnoksista $Y(\omega)$ ja $U(\omega)$ arviot määritelmän perusteella:

$$Y_S(\omega) = \int_0^S y(t)e^{-i\omega t} dt, \quad U_S(\omega) = \int_0^S u(t)e^{-i\omega t} dt$$

\Rightarrow Empiirinen siirtofunktioestimaatti (empirical transfer function estimate, ETFE):

- $\hat{G}(i\omega) = Y_S(\omega)/U_S(\omega)$
- perustuu vain mittauksiin ja lineaarisuusoletukseen

Fourier-analyysi käytännössä

- $u(t) = u_0 \cos \omega_* t$ ja $S = k\pi / \omega_*$, $k = 1, 2, \dots \Rightarrow U_S(\omega_*) = u_0 S / 2$, muuten $U_S(\omega) = 0$
- Tällöin ETFE on $\hat{G}_S(i\omega_*) = \frac{2}{u_0 S} \left(\int_0^S y(t) \cos(\omega_* t) dt - i \int_0^S y(t) \sin(\omega_* t) dt \right)$
- Helppo laskea: korreloidaan $y(t)$ sinin ja kosinin kanssa

-
- Käytännössä integraaleja approksimoidaan (diskreetti Fourier-muunnos):

$$Y_S(\omega) = T \sum_{k=1}^N y(kT) e^{-i\omega kT}, U_S(\omega) = T \sum_{k=1}^N u(kT) e^{-i\omega kT}$$

- $T =$ näytteenottoväli ja $S = NT$
- Jakso $2\pi \Rightarrow$ riittää laskea välille $0 \leq \omega \leq 2\pi$, valitaan $\omega = r2\pi / N$, $r = 0, \dots, N-1$
- Nopea Fourier-muunnos (FFT, Fast Fourier Transform, Matlab *fft*)
 - Diskreetti Fourier-muuntaminen vaatii N^2 laskutoimitusta
 - FFR vaatii $N \log_2 N \ll N^2$ laskutoimitusta

ETFE:n tarkkuus

- ETFE:n ja todellisen taajuusvasteen ero riippuu
 - käytetystä ohjauksesta ja sen taajuussisällöstä
 - systeemin ominaisuuksista
(impulssivaste)
 - signaali-kohinasuhteesta

$$|G(i\omega) - \hat{G}(i\omega)| \leq \frac{c}{|U(\omega)|} + \frac{|V(\omega)|}{|U(\omega)|}$$

- Jos $u(t)$:ssä on sinikomponentti tietyllä taajuudella ja häiriössä ei, virhe ko. taajuudella pienenee S :n kasvaessa
- Muuten määräävä tekijä on signaali-kohinasuhde

Signaalien taajuussisältö - Spektri

- **Spektri (myös tehospektri, spektraaliteys):** merk. $w(t)$:n spektriä $\Phi_w(\omega)$:llä, missä ω on (kulma)taajuus
 - ”yksikkönä” energia/taajuus
 - kertoo energian taajuusjakauman
- Kaksi määritelmää:
 1. Deterministisille signaaleille spektri määritellään signaalin Fourier-muunnoksen modulin neliönä
 2. Stationaarisille stokastisille prosesseille spektri määritellään kovarianssifunktion diskreettinä Fourier-muunnoksena

Signaalien taajuussisältöjen vertaaminen - Ristispektri

- **Ristispektri (ristitehotiheyspektri) $\Phi_{yu}(\omega)$:**
 - deterministisille signaaleille määritellään y :n Fourier-muunnoksen ja u :n Fourier-muunnoksen kompleksikonjugaatin tulona
 - stationaarisille stokastisille prosesseille se on vastaavasti ristikovarianssin diskreetti Fourier-muunnos
- Intuitiivinen tulkinta: tarkastellaan kahta signaalia $y(t)$ ja $u(t)$: jos $u(t)$:ssä on taajuuskomponentti $\cos(\omega t)$, on $y(t)$:ssä sama komponentti $|\Phi_{yu}(\omega)|$ kertaa suurempana ja vaiheeltaan $\arg \Phi_{yu}(\omega)$ jäljessä
- $\Phi_{yu}(\omega)=0 \Leftrightarrow$ signaalit korreloimattomia

Deterministisen jatkuva-aikaisen signaalin spektrit

- Signaali: $w(t)$, $-\infty < t < \infty$
- Fourier-muunnos: $W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-i\omega t} dt$
- Spektri: $\Phi_w(\omega) = |W(\omega)|^2$
- Signaalit: $u(t)$ ja $y(t)$, $-\infty < t < \infty$
- Ristispektri: $\Phi_{yu}(\omega) = Y(\omega)\overline{U(\omega)}$

Deterministisen diskreettiaikaisen signaalin spektrit

- Signaali: $w(kT)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 - Näytteenottoväli T
- Fourier-muunnos: $W^{(T)}(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} w(kT) e^{-i\omega kT}$
- Spektri: $\Phi_w^{(T)}(\omega) = |W^{(T)}(\omega)|^2$
- Signaalit: $u(kT)$ ja $y(kT)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Ristispektri: $\Phi_{yu}(\omega) = Y^{(T)}(\omega) \overline{U^{(T)}(\omega)}$

Stokastisen diskreettiaikaisen signaalin spektrit

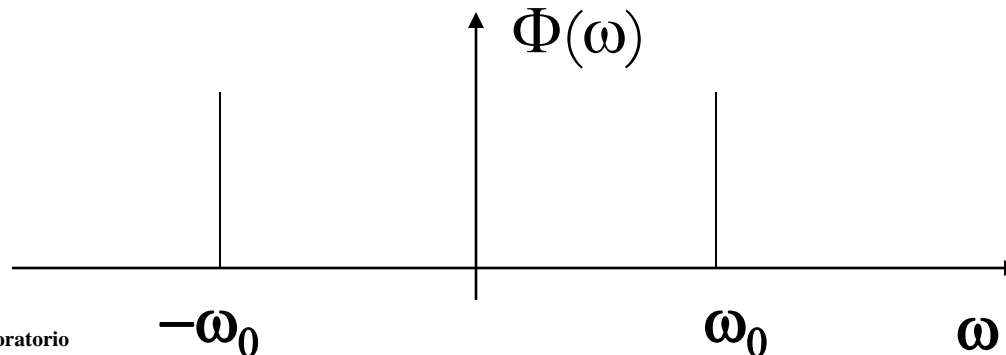
- Signaali: $w(kT)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ja $Ew(kT) = 0$
 - Näytteenottoväli T
- Kovarianssifunktio: $R_w(kT) = Ew(t + kT)w(t)$
- Spektri: $\Phi_w(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} R_w(kT) e^{-i\omega kT}$
- Signaalit: $u(kT)$ ja $y(kT)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Ristikovarianssifunktio: $R_{yu}(kT) = Ey(t + kT)u(t)$
- Ristispektri: $\Phi_{yu}(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} R_{yu}(kT) e^{-i\omega kT}$

Esimerkki, deterministisen signaalin spektri

- $A\sin(\omega_0 t)$:n Fourier-muunnos on $i\pi A(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
- Sen spektri on muunnoksen itseisarvon neliö:

$$\Phi(\omega) = \pi^2 A^2 (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

- Energia on täysin taajuuksilla ω ja $-\omega$ ja spektri näyttää tältä:



Esimerkki, stokastisen signaalin spektri

- Valkoisen kohinan $e(t)$ spektri
- $Ee(t)=0$ ja $e(t)$:n kovarianssifunktio on
 $R_e(kT)=Ee(t+kT)e(t)=\lambda^2$, kun $k=0$ ja 0 muulloin
 - λ^2 on kohinan varianssi $Ee(t)^2$
- Ol. $T=1$ ja lyödään tämä spektrin kaavaan $\Rightarrow \Phi_e(\omega)=\lambda^2$
 - valkoinen kohina sisältää siis kaikkia taajuuksia yhtä paljon

Spektraalianalyysin tausta: Jatkuva-aikaisen lineaarinen järjestelmän vaikutus spektriin

- Systemi $y(t)=G(p)u(t)+v(t)$ (I), $u(t)$ ja $v(t)$ riippumattomia
- Fourier-muunnetaan (I) puolittain: $Y(\omega)=G(i\omega)U(\omega)+V(\omega)$ (II)
- (II) puolittain $|\cdot|^2$ ja muistetaan spektrin ja ristispektrin määritelmät \Rightarrow

$$\Phi_y(\omega) = |G(i\omega)|^2 \Phi_u(\omega) + \Phi_v(\omega)$$

- Kerrotaan (II) puolittain $\text{conj}(U(\omega))$:llä ja muistetaan spektrin ja ristispektrin määritelmät \Rightarrow

$$\Phi_{yu}(\omega) = G(i\omega) \Phi_u(\omega)$$

Spektraalianalyysi

- Taajuusvaste sisäänmenon ja ulostulon spektrien avulla
- Systemille $y(t)=G(p)u(t)+v(t)$ pätee

- $\Phi_{yu}(\omega)=G(i\omega)\Phi_u(\omega)$ (1)

- $\Phi_y(\omega)=|G(i\omega)|^2\Phi_u(\omega)+\Phi_v(\omega)$ (2)

- (1):stä saadaan

$$\hat{G}_N(i\omega) = \hat{\Phi}_{yu}^N(\omega) / \hat{\Phi}_u^N(\omega)$$

- (2):sta voidaan estimoida häiriön $v(t)$ spektri

$$\hat{\Phi}_v^N(\omega) = \hat{\Phi}_y^N(\omega) - |\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)|^2 / \hat{\Phi}_u^N(\omega)$$

- Yllä on käytetty sopivia spektrin estimaatteja N :n mittauksen pohjalta
- Spektreille tarvitaan estimaatit!

Spektrin estimointi

- Signaalin $u(t)$ spektri $\Phi_u(\omega)$:
 - $u(t)$:n Fourier-muunnoksen itseisarvon neliö (deterministinen signaali)
- Ol. että $u(t)$:tä on havaittu T :n välein
 - Datasta saadaan vain näytteistetyyn signaalin spektri
 - Jos T pieni verrattuna $u(t)$:n taajuussisältöön, ero on pieni
 - Oletetaan seuraavassa että $T=1$

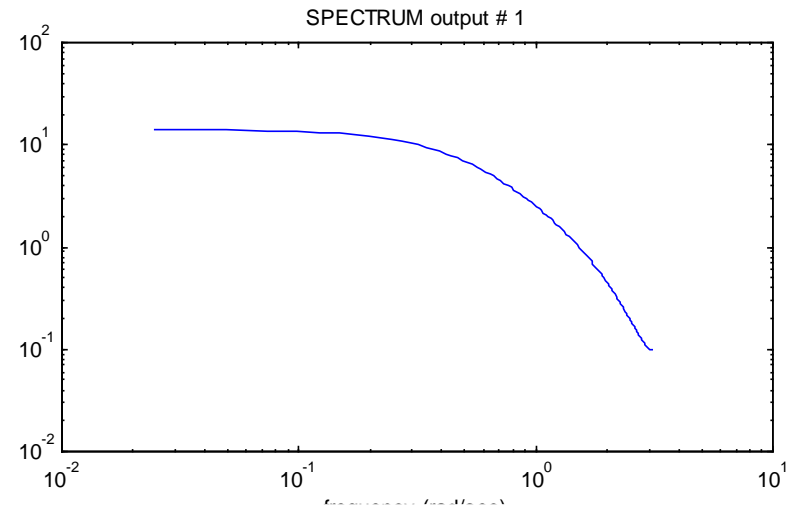
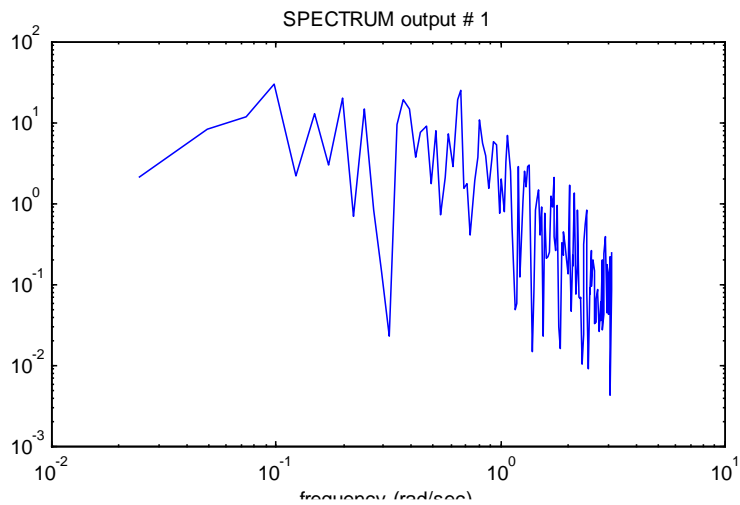
- Suoraan määritelmästä saadaan **periodogrammi**:

$$\hat{\Phi}_N(\omega) = \frac{1}{N} |U_N(\omega)|^2, \quad U_N(\omega) = \sum_{k=1}^N u(k)e^{-i\omega k}$$

- Huom.! Näytteenottoväli $T \Rightarrow$ näytteenotto(kulma)taajuus $2\pi/T \Rightarrow$ Nyquist-taajuus $\pi/T \Rightarrow$ periodogrammi toimii, kun $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$

Esimerkki

- ARMA-prosessin $y(t)=0.6*y(t-1)+0.5e(t-1)+e(t)$ realisaation periodogrammi ($N=10000$) ja todellinen spektri



Periodogrammin ominaisuuksia

- Tyypillisiä ominaisuuksia:
 - Periodogrammi on hyvin epätasainen
 - Puhtaat sinikomponentit näkyvät piikkeinä
- Antaa kohtuullisen kuvan signaalin taajuussisällöstä
- Periodogrammi on satunnaismuuttuja, kun $u(t)$ stokastinen prosessi:
 - Odotusarvo yhtyy todellisen spektrin odotusarvoon (A)
 - Varianssi EI lähesty nollaa N :n kasvaessa (B) \Rightarrow epätasaisuus!
 - eri taajuuksien estimaatit eivät korreloi (C)
- Taajuusresoluutio: mitkä taajuudet eroavat toisistaan?
 - Periodogrammin resoluutio on $2\pi/N$

$$(A) \mathbf{E} \left\{ \hat{\Phi}(\omega) \right\} = \Phi_u(\omega) + R^{(1)}$$

$$(B) \mathbf{Var} \left\{ \hat{\Phi}(\omega) - \Phi_u(\omega) \right\} = \Phi_u^2(\omega) + R^{(2)}$$

$$(C) \mathbf{Cov} \left\{ \hat{\Phi}(\omega_1) - \Phi_u(\omega_1), \hat{\Phi}(\omega_2) - \Phi_u(\omega_2) \right\} = R^{(3)} \quad \left| \omega_1 - \omega_2 \right| \geq \frac{2\pi}{N}$$

where $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ and $R^{(3)}$ go to zero as N goes to infinity.

Keinoja pienentää varianssia

- Periodogrammin varianssi usein turhan suuri
 - Spektriestimaatin toivottu ominaisuus sileyks – trade-off: tasoittaminen huonontaa taajuusresoluutiota
1. Usean riippumattoman estimaatin keskiarvottaminen (Welchin menetelmä)
 2. Keskiarvotetaan läheisten lähitaajuuksien kanssa => ikkunointi (Blackman-Tukeyn menetelmä)

1. Tasoittaminen keskiarvottamalla

- Jaetaan signaali R :ään segmenttiin
- Periodogrammi kullekin segmentille
 - sopivin valinnoin tehokas laskenta FFT:llä
- Spektriestimaatti saadaan näiden periodogrammien keskiarvona
- Spektriestimaatin varianssi pienenee R :ään verrannollisesti & taajuusresoluutio huononee R :ään verrannollisesti
- Vastaavasti ristispektrin estimointi

2. Tasoittaminen ikkunoimalla

- Muodostetaan estimaatti taajuudella ω laskemalla painotettu keskiarvo periodogrammista:

$$\hat{\Phi}_N(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} W_{\gamma}(\omega - \xi) \hat{\Phi}_N(\xi) d\xi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} W_{\gamma}(\omega) d\omega = 1$$

- $W_{\gamma}(\omega)$ on painofunktio (ikkunafunktio):
 - Parametri γ kuvaa ikkunan leveyttä
 - leveä ikkuna \Rightarrow tasainen spektri vs. kapea ikkuna \Rightarrow hyvä taajuusresoluutio

Implementointi aikatasossa

- Taajuustasossa implementointi tehontonta
- Em. integraali aikatasossa ilmaistuna on (Appendix 8.8):

$$\hat{\Phi}_N(\omega) = \sum_{k=-\gamma}^{\gamma} w_{\gamma}(k) \hat{R}_u^N(k) e^{-i\omega k}; w_{\gamma}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} W_{\gamma}(\xi) e^{i\xi k} d\xi$$

- $\hat{R}_u^N(k)$ on u :n autokovarianssin estimaatti viiveellä k
- Aikaikkuna $w_{\gamma}(k)$ oletettu nolllaksi kun $|k| > \gamma$
- Paljon käytetty on Hamming-ikkuna:

$$w_{\gamma}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi k}{\gamma} \right) \right), & \text{kun } |k| < \gamma \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

γ kasvaa \Rightarrow tasoitetun periodogrammin

taajuusresoluutio pienenee (hyvä asia) $\approx \frac{\pi}{\sqrt{2}\gamma}$

varianssi kasvaa (ei niin hyvä asia) $\approx \sqrt{2} \frac{\gamma}{N} \Phi_u^2(\omega)$

Spektriestimaatti – tasoittaminen ikkunoimalla

1. Valitse aikaikkuna $w_\gamma(k)$ (Hamming ok)
 2. Valitse ikkunanleveysparametri γ (tämä jää analyytikon vastuulle, muuten voi pitää silmät kiinni)
 3. Laske u :n autokovarianssin (symmetrinen) estimaatit 0:sta γ :aan
 4. Laske $\hat{\Phi}_N(\omega)$ edellä kuvatun mukaisesti
- Huom. 1) edellä oletettu että $T=1$. Jos näin ei ole, on spektriestimaatti skaalattava:
$$\hat{\Phi}_N^0(\xi) = T\hat{\Phi}_N(\xi T), -\pi/T \leq \xi \leq \pi/T$$
 - Huom. 2) Myös ristispektri voidaan estimoida samaan tapaan korvaamalla autokovarianssi ristikovarianssilla

Taajuusvasteen estimointi (Spectral Analysis, SPA)

1. Kerää data $y(k)$, $u(k)$, $k=1,\dots,N$; keskiarvota
2. Muodosta spektriestimaatit
 - joko tasoittaminen keskiarvottamalla
 - tai tasoittaminen ikkunoimalla
3. Laske systeemin taajuusvaste kaavasta

$$\hat{G}_N(i\omega) = \hat{\Phi}_{yu}^N(\omega) / \hat{\Phi}_u^N(\omega)$$

Yhteenveto spektraalianalyysistä

- Yleispätevä menetelmä
 - vaatii ainoastaan lineaarisuusoletuksen
 - ei vaadi erityisiä herätteitä
- Sopivalla γ :n valinnalla saadaan hyvä kuva systeemin taajuusominaisuuksista
- Tulos ei kelpaa suoraan simulointiin
 - siirtofunktion estimointi/päättely estimoidun taajuusvasteen avulla
- Spektraalianalyysi ei toimi takaisinkytketyissä systeemeissä
 - u ja v korreloituneita, perusyhtälöt (1) ja (2) dialla #17 eivät päde

Yhteenveto - epäparametriset identifiointimenetelmät

- Käsitelty
 - Transientti- ja korrelaatioanalyysi => impulssi- ja askelvaste
 - Taajuus-, Fourier- ja spektraalianalyysi => taajuusvaste
- Tulokset kvalitatiivisluontoisia
 - Yleiskuva systeemistä
 - Eivät sovellu suoraan simulointiin
 - Ohjaavat jatkotutkimuksia ja koesuunnittelua:
esim. kiinnostavat taajuudet