Parametriset mallit

- Rakenteelliset mallit
  - parametreillä a priori tulkinta & merkitys
  - vrt. 3. harjoitustyö
- Black box-mallit
  - parametrit vain laskennan/sovituksen apuvälineitä
- Tarkastellaan pääosin lineaarisia diskreettiaikaisia black-box-malleja
- Tämän diasetin teemoja
  - malliluokat
  - parametrien estimointi - ennustevirhemenetelmä
  - mallin hyvyys vs. parametriestimaattien harhaisuus ja varianssi
  - systeemin / mallin identifioituvuus

Rakenteelliset mallit

- Fysikaalisin tai vastaavin perustein rakennettuja malleja
  - osa parametreista tunnettu: esim. massat, poikkipinta-alat jne...
  - osa estimoitava: kitkakertoimet,...
- Merkintä $$\frac{d}{dx}x(t) = f(x(t), u(t), \theta); \hat{y}(t \mid \theta) = h(x(t), u(t), \theta)$$

  jossa y^(t|θ) on mallin ennustettu ulostulo hetkellä t ja parametrivektorilla θ
- Edellä oletetaan valkoinen mittauskohina y(t)=h(x(t),u(t),θ)+e(t)
  - E(y(t,θ))=y^(t,θ)
  - jos kohinalla on rakennetta, se kannattaa huomioida, esim. ARMA-malli
- Ennustevirhe ε(t)=y(t)-y^(t,θ) (residuaali = ennustevirhe numerona)
- Estimointiongelma: etsi θ s.e. min $V_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varepsilon^2(t, \theta)$

Black box -mallit

- Yleinen lineaarinen diskreettiaikainen malli on muotoa $y(t)=\eta(t)+w(t)$
  - $w(t)$ = häiriötermi
  - $\eta(t)$ = häiriötön ulostulo
- Termit muotoa $\eta(t)=G(q,\theta)u(t)$, $w(t)=H(q,\theta)e(t)$
  - G() ja H() lineaarisia suotimia = diskreettiaikaisia siirtofunktioita
  - käytännössä rationaalisia (muotoa polynomi/polynomi) ja (asymptoottisesti) stabiileja (eräs validiontitarkastelu)
  - $G(q,\theta)=B(q,\theta)/F(q,\theta)$, $H(q,\theta)=C(q,\theta)/D(q,\theta)$
  - parametrivektori θ koostuu polynomien B,F,C ja D kertoimista b_i,f_i,h_i,d_i ja kohinan e(t) varianssista
  - ”rakenneparametrit” n_b, n_c, n_d, n_f ja n_k (kuollut aika)

Transfer function parameterizations

The transfer functions $G(q)$ and $H(q)$ in the linear model

$$y[k] = G(q;\theta)u[k] + H(q;\theta)e[k]$$

will be parameterized as

$$G(q;\theta) = q^{-n_k} \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b}}{1 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_{n_f} q^{-n_f}}$$

$$H(q;\theta) = \frac{1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c}}{1 + d_1 q^{-1} + \cdots + d_{n_d} q^{-n_d}}$$

where the parameter vector θ contains the coefficients $\{b_k\}$, $\{f_k\}$, $\{c_k\}$, $\{d_k\}$

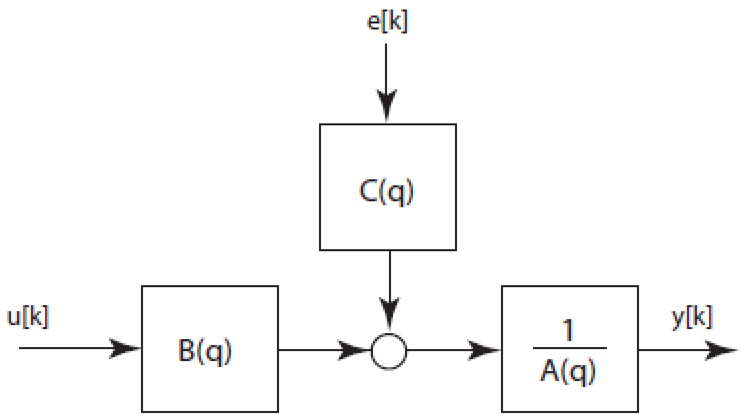
Note: n_k determines dead-time, n_b, n_f, n_c, n_d order of transfer function polynomials.

Erilaisia mallirakenteita

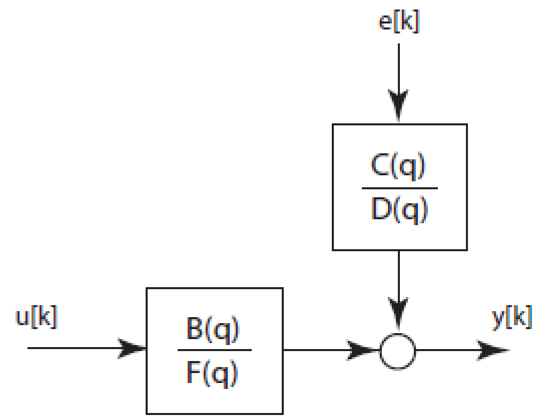
- Box-Jenkins (BJ): $G(q)=B(q)/F(q)$, $H(q)=C(q)/D(q)$
  - "täydellinen" malli
  - systeemin ja kohinan mallit riippumattomia toisistaan
- Output error (OE): $H(q)=1$ eli $n_c=n_d=0$
  - kohina valkoista $w(t)=e(t)$, eli ei erityistä rakennetta
- ARMAX: $A(q)y(t)=B(q)u(t)+C(q)e(t)$
  - kohina kokee saman dynamiikan kuin u
  - järkevää kun kohina tulee prosessiin sen alkupäässä
- ARX: $A(q)y(t)=B(q)u(t)+e(t)$ (myös *yhtälövirhemalli*)
  - ennustevirhe lineaarinen parametrien suhteen => parametrien estimointi "helppoa" – tavallinen PNS
  - kohina kokee saman dynamiikan kuin u; ei haittaa, jos signaali-kohina-suhde on hyvä
- Käyttö: määrää asteluvut, estimoi parametrit
  - käytännössä useita eri mallirakenteita ja astelukuja verrataan

Mallirakenteita

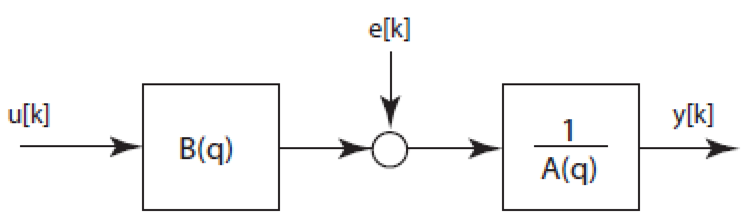
ARMAX (autoregressive moving average exogeneous input)



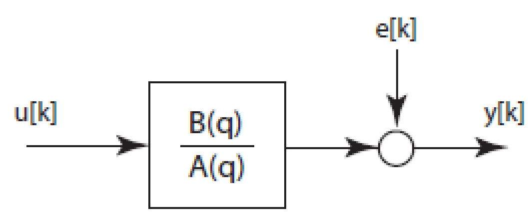
BJ (Box Jenkins)



ARX (autoregressive with exogeneous input)



OE (output error)



Mallin tuottama ennuste y^(t)

- Usein mallin käyttötarkoitus ennustaminen – tarvitaan myös ennustevirheen neliösummassa
- Millainen on kahdella edellisellä dialla esitettyjen mallien ennuste?
  - Malli muotoon y(t)=JOTAIN+e(t) => y^(t)=E(y(t))=JOTAIN, koska E(e(t))=0
- OE: y^(t,θ)=G(q,θ)u(t)
- ARX: y^(t,θ)=(1-A(q))y(t)+B(q)u(t)

Consider the linear model

$$y[k] = G(q)u[k] + H(q)e[k]$$

Multiply by $H^{-1}(q)$ (to make noise term white) and re-write as

$$y[k] = (1 - H^{-1}(q))y[k] + H^{-1}(q)G(q)u[k] + e[k]$$

Since $\{e\}$ is a white noise sequence, our best prediction is

$$\hat{y}[k] = (1 - H^{-1}(q))y[k] + H^{-1}(q)G(q)u[k]$$

Mallien sovitus

- Ennustevirhemenetelmät: valitse θ s.e. ennuste on ”hyvä”
  - toimiva hyvyyskriteeri ennustevirheen (otos)varianssi
  - ennustevirhe $\varepsilon(t)=y(t)-\hat{y}(t,\theta)$ ja hyvyyskriteeri

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varepsilon^2(t,\theta)$$

- $\hat{\theta}_N = \arg\min V_N(\theta)$
  - PNS on ennustevirhemenetelmien erikoistapaus
  - MIMO-mallit: $\varepsilon^2(t)$ matriisiarvoinen, tarvitaan sopiva reaaliarvoinen kuvaus: det, trace, ...
- $V_N(\hat{\theta})$ on kohinan e(t) varianssin estimaatti

Lineaarinen regressio

- Regressio: malli muotoa $y(t)=\theta^T\phi(t)+e(t)$, $\phi(t)$ vektori, jossa viivästettyjä u(t):n ja y(t):n arvoja
  - θ sisältää viiveoperaattoripolynomien kertoimet
- N mittausta => matriisi $X=[\phi(1),\phi(2),\ldots,\phi(N)]'$ sekä ulostulo $Y(t)=[y(1),\ldots,y(N)]'$ => $\hat{\theta}=(X^TX)^{-1}X^TY$
- Soveltuu ARX-mallien parametrien estimointiin
  - muut malliluokat epälineaarisia parametrien suhteen
- PNS-oletuksien syytä olla voimassa:
  - viivästetyt y:n ja u:n arvot keskenään kollineaarisia (koesuunnitteluongelma) ⇔ parametrit tehottomia (suuri varianssi) ja harhaisia, mutta tarkentuvia
  - e:n homoskedastisuus (vakio varianssi) ⇔ parametrit tehottomia => painotettu PNS-estimointi
  - e:n korreloimattomuus ⇔ parametrit tehottomia, harhaisia eivätkä tarkentuvia! => kohinalle jonkinlainen rakenne

Iteratiivinen minimointi

- Mallit epälineaarisia parametrien suhteen
  - PNS ei onnistu
- Tarvitaan iteratiivinen menetelmä
  - kyseessä epälineaarinen rajoittamaton optimointitehtävä
- Gradienttimenetelmä: $\theta^{k+1}=\theta^k-\alpha^k V_N'(\theta^k)$
  - α^k viivahaun avulla haettava askelpituus
- Toisen kertaluvun menetelmät: sovelletaan Newton-iterointia optimiratkaisun välttämättömiin ehtoihin
  - välttämätön ehto $V_N'(\theta)=0$
  - iterointi $\theta^{k+1}=\theta^k-\alpha^k[V_N''(\theta^k)]^{-1}V_N'(\theta^k)$
- Tarvitaan $V(\theta)$:n eli $\varepsilon(t)$:n derivaatat parametrien suhteen
  - riippuvat mallirakenteesta; laskari #9, tehtävä #2

Mikä on hyvä malli?

- Mallin laatu on yhteydessä mallin käyttötarkoitukseen
  - hyvä säätösuunnittelumalli voi olla huono simulointimalli
- Mallin laatu liittyy sen kykyyn kuvata systeemin toiminta
  - systeemin ja mallin ulostulot riittävän samanlaiset
- Hyvä malli yleistää, i.e., mallin ominaisuudet ”eivät riipu estimointidatasta” - mallin tilastolliset ominaisuudet
  - parametrien varianssi
    - varianssia voidaan pienentää kasvattamalla havaintojen lukumäärää
    - mallin ”variance error”
  - Estimaattien konvergenssi vääriin arvoihin
    - väärä mallirakenne / puutteellinen koesuunnittelu
    - erotettava <u>mallirakenteen</u> vaikutus ja <u>identifiointikokeen</u> vaikutus
    - mallin ”bias error”

Parametriestimaattien harhasta

- Mitä tapahtuu, kun N->oo?
- Olkoon ennustevirheen varianssi $E\varepsilon^2(t,\theta)=V(\theta)$
- Jos ennustevirhe $\varepsilon(t,\theta)$ on valkoista kohinaa, niin

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varepsilon^2(t,\theta) \xrightarrow[N\to\infty]{} E\varepsilon^2(t,\theta) = V(\theta) \text{ w.p.1}$$

ja lisäksi $\theta \xrightarrow[N\to\infty]{} \theta^* = \arg\min V(\theta)$

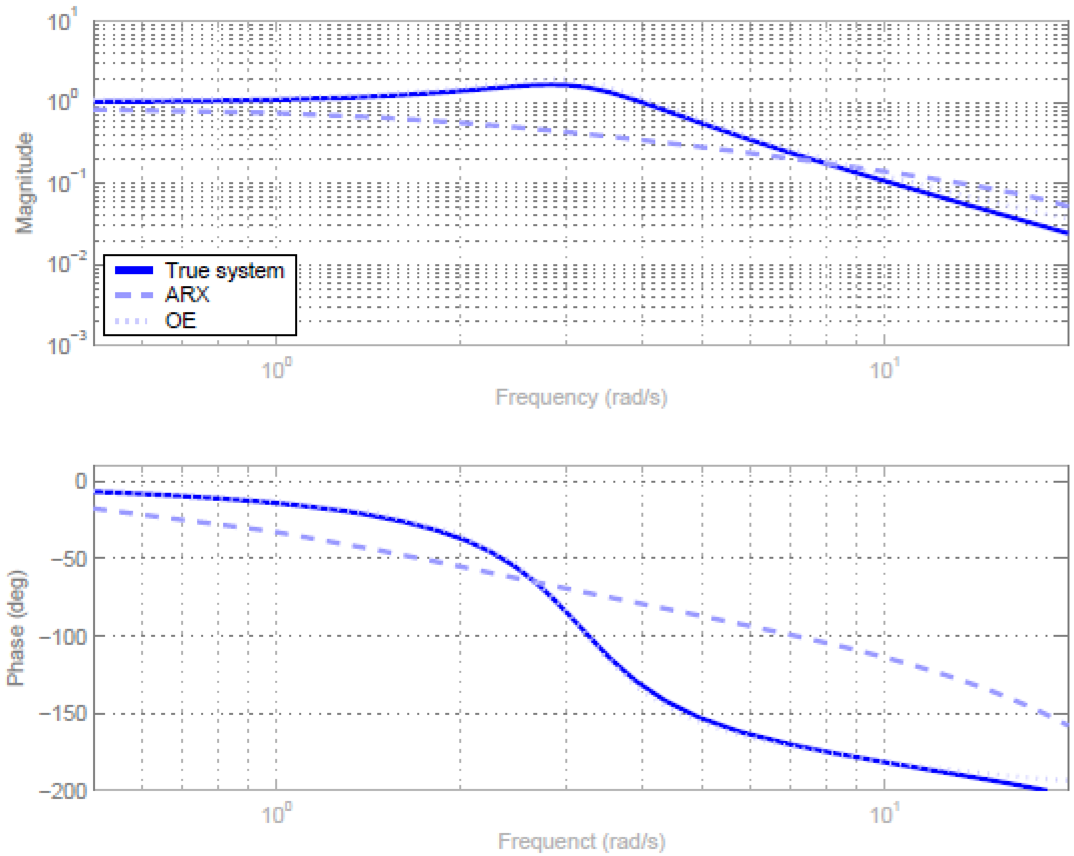
- Jos ennustevirhe ei ole korreloimaton (esim. väärä malli), niin estimaatti on harhainen ja konvergoituu väärään arvoon vs. ”oikean” mallin estimaatin arvo
- Estimaatti minimoi edelleen ennustevirheen varianssin
  - ”paras” malli väärästä malliluokasta

Esimerkki: väärä mallirakenne

- Olkoon data peräisin ARMAX-prosessista $y(t)+a_0y(t-1)=b_0u(t-1)+e_0(t)+c_0e_0(t-1)$
- Sovitetaan ARX-malli $\hat{y}(t|\theta)+ay(t-1)=bu(t-1)$
- Ennustevirheen varianssi on $E(y(t)+ay(t-1)-bu(t-1))^2 =...=$ $r_0(1+a^2-2aa_0)+b^2-2bb_0+2ac_0$
  - ($r_0=Ey^2(t)$, ei riipu a:sta eikä b:stä)
- Ennustevirheen varianssin minimoivat $\hat{a}$, $\hat{b}$: $\hat{a}=a_0-c_0/r_0$;$\hat{b}=b_0$;
  - $E\hat{a}\neq a_0$ eli estimaatti on harhainen
- Ennustevirheen varianssi näillä $\hat{a}$, $\hat{b}$ on $1+c_0^2-c_0^2/r_0$
  - todellisilla parametriarvoilla a_0 ja b_0 varianssi on $1+c_0^2$ eli suurempi

Model structure matters!

Example: $G(s) = 10/(s^2 + 2s + 10)$, sampling time $h = 0.05$, noise variance 0.1^2



Parametriestimaatin konvergenssi taajuustasossa

Assume that the true system is described by

$$y[k] = G_0(q)u[k] + w[k]$$

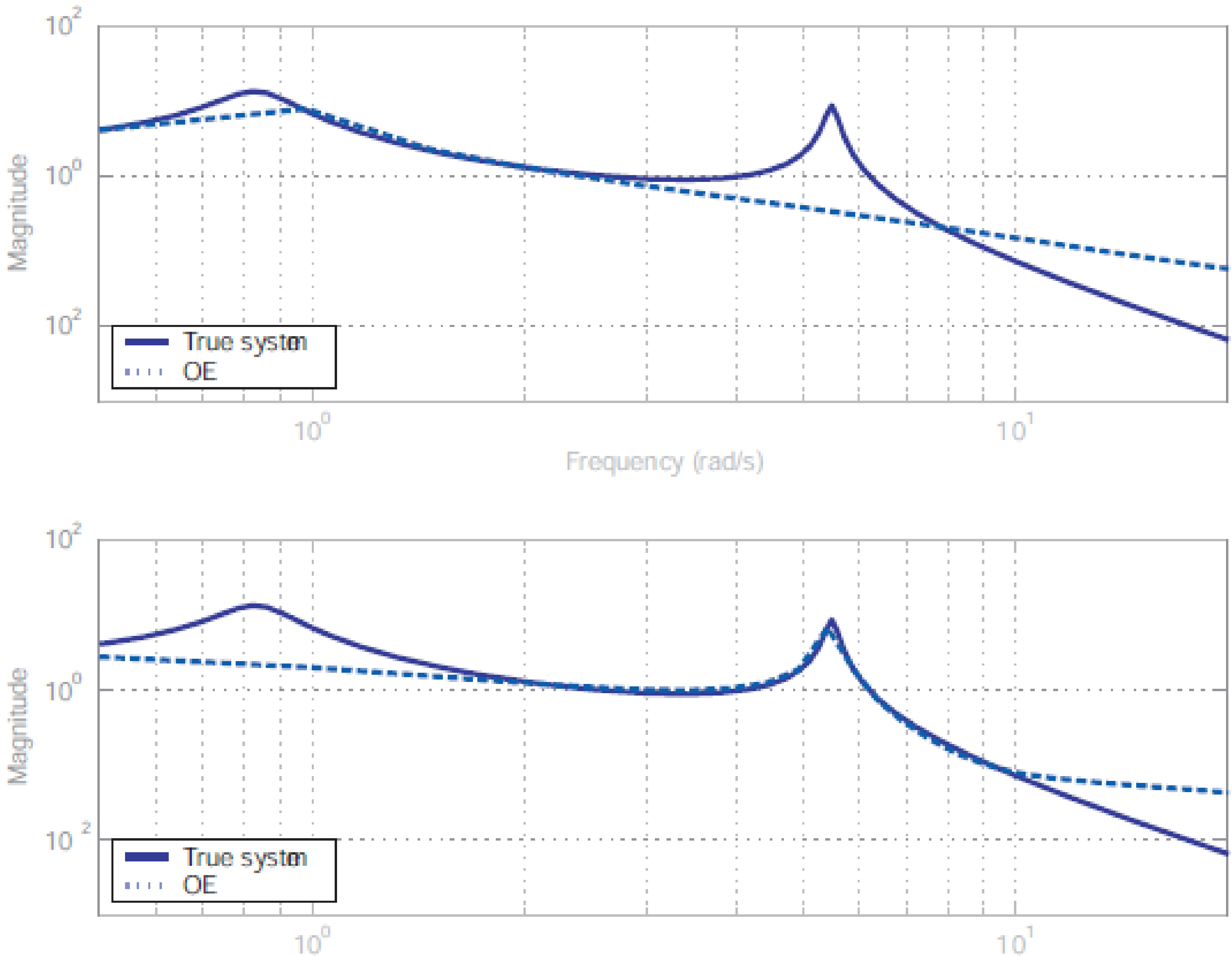
and that we try to estimate a model on the form ($H_*(q)$ independent of θ)

$$y[k] = G(q;\theta)u[k] + H_*(q)e[k]$$

$$\theta^* = \lim_{N\to\infty} \hat{\theta}_N = \arg\min \int_{-\pi}^{\pi} |G_0(e^{i\omega}) - G(e^{i\omega},\theta)|^2 \frac{\Phi_u(\omega)}{|H_*(e^{i\omega})|^2} d\omega$$

- $V_N(\theta)$:n minimoiva estimaatti lähestyy arvoa, joka saa mallin taajuusvasteen mahdollisimman lähelle systeemin taajuusvastetta painotettuna
  - ohjauksen spektrillä
  - kohinamallin taajuusvasteen käänteisluvulla
- Koesuunnittelu: valitaan u:n taajuusominaisuudet sopivasti => hyvä sovitus mielenkiintoisilla taajuuksilla

Output error model using low- and high-frequency input signal



Parametriestimaattien varianssi

- Oletetaan, että ennustevirhe $\varepsilon(t,\theta)$ on valkoista kohinaa
- Tällöin parametriestimaatin $\hat{\theta}_N$ kovarianssimatriisi P_N on

$$P_N = E(\hat{\theta}_N - \theta_0)(\hat{\theta}_N - \theta_0)^T \approx \frac{1}{N}\lambda \bar{R}^{-1}$$

jossa $R=\psi(t,\theta_0)\psi^T(t,\theta_0)$ ja $\psi(t,\theta)=d/d\theta\, \hat{y}(t,\theta)$

- P_N riippuu
  - kohinan varianssista
  - datapisteiden lukumäärästä
  - ennusteen gradientista (herkkyys!)
- Parametriestimaatit asymptoottisesti normaalijakautuneita
  - tilastollisen merkitsevyyden testaus t-testillä
- Taajuusvasteen modulin varianssi annetulla parametriestimaatilla riippuu

$$\mathbf{Var}\left\{G(e^{i\omega};\theta)\right\} \approx \frac{n}{N}\frac{\Phi_w(\omega)}{\Phi_u(\omega)}$$

  - parametrien lukumäärästä ja kohinan spektristä
  - datapisteiden lukumäärästä ja ohjauksen spektristä

Identifioituvuus

- Identifioituvuus: Voidaanko systeemin/mallin parametrit määrätä yksikäsitteisesti input-output –datasta?

Milloin ei voida?

- Kaksi erilaista parametrivektoria tuottaa samanlaisen mallin input-output –käyttäytymiseen
  - rakenteellinen identifioituvuus, ymmärretään systeemin ominaisuutena, vrt. harjoitustyö #3
- Kaksi erilaista parametrivektoria tuottaa erilaisen input-output-käyttäytymiseen ”hyvällä” inputilla, mutta puutteellinen input aiheuttaa samanlaiset ennusteet
  - ”deterministinen identifioituvuus”, ks. laskari #10, tehtävät #1 & #2

Esimerkki rakenteellisesta identifioituvuudesta: tasavirtamoottori

- Valitaan tiloiksi kulma-asento y(t) ja –nopeus ω(t) ja ohjaukseksi jännite u(t):

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/\tau \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta/\tau \end{bmatrix} u(t),$$

- Tässä

$$\tau = \frac{JR_1}{fR_1 + k^2}, \quad \beta = \frac{k}{fR_1 + k^2}$$

- Systeemissä on 5 parametriä, mutta mallissa vain 2
  - vaikka <u>mallin</u> parametrit saataisiin estimoitua, niistä saadaan vain 2 yhteyttä <u>systeemin</u> parametrien välille
  - tällä parametroinnilla identifiointi ei onnistu – systeemi ei rakeenteellisesti identifioituva

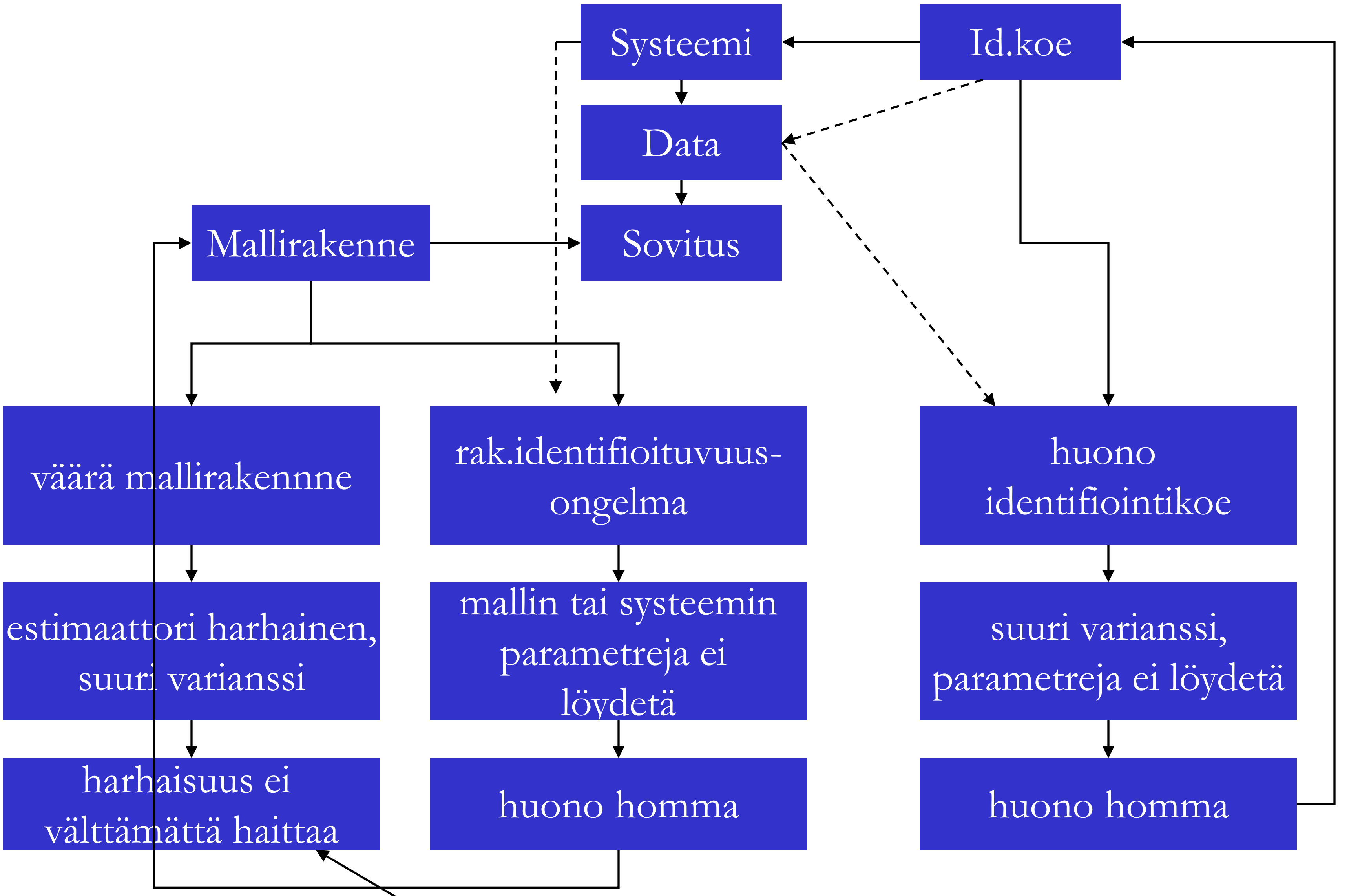
Vaatimukset herätteelle

- Intuitiivisia tuloksia
  - identifiointikokeen pitäisi herättää systeemin mielenkiintoiset toimintatilat
  - sisäänmenon taajuussisältö oleellisessa asemassa
- Jatkuvasti herättävyyden käsite – tarkastellaan diasetillä #10
  - kvantitatiivisia tuloksia herätteen laadun ja parametriestimoinnin onnistumisen välille

Esimerkki deterministisestä identifioituvuudesta

- ARX-malli $\hat{y}(t|\theta)=au(t-1)+bu(t-2)$, $\theta=(a\ b)'$
  - valitaan u vakio-ohjaus u_0:ksi
- Todellinen ennuste on tällöin $\hat{y}(t|\theta)=(a+b)u_0(t-1)$
  - kaikki parametrit a ja b, joiden summa on sama, antavat saman ennusteen
- Malli (= parametrit a ja b) ei ole identifioituvia (tällä herätteellä)
  - malli on kuitenkin rakenteellisesti identifioituva

Estimoinnin ongelmalähteet



kunhan mallin käyttötarkoitus ei ole parametrien estimointi!

Yhteenveto

- Perusidea: haetaan parametrivektori, joka minimoi ennustevirheen varianssin (=neliösumman)
  - parametriestimaatin varianssi riippuu kohinan varianssista, datan määrästä ja ennusteen herkkyydestä parametrin suhteen
- Lähestymistavan etuja
  - yleinen käytettävyys, monipuolisuus
  - tuloksena simulointiin soveltuva malli
- Haittoja, muttei välttämättä ylitsepääsemättömiä
  - tarvitaan näkemys systeemin rakenteesta