

Identifiointiprosessi kokonaisuutena

Alustavia kokeita

- Koesuunnittelu, identifiointikoe
- Mittaustulosten / datan esikäsittely
- Ei-parametriset menetelmät
 - transientti-, korrelaatio-, taajuus-, Fourier- ja spektraalianalyysi => askel-, impulssi- ja taajuusvaste; ajatuksia esim. kertaluvuista
- Mallirakenteen (rakenneparametrit) valinta
- Parametrien estimointi
- Mallirakenteiden vertaaminen
- Mallin arviointi & validointi

Identifiointiprosessi kokonaisuutena

Alustavia kokeita

- **Koesuunnittelu, identifiointikoe**
 - Mittaustulosten / datan esikäsittely
 - Ei-parametriset menetelmät
 - transientti-, korrelaatio-, taajuus-, Fourier- ja spektraalianalyysi => askel-, impulssi- ja taajuusvaste; ajatuksia esim. kertaluvuista
- Mallirakenteen (rakenneparametrit) valinta
 - Parametrien estimointi
 - Mallirakenteiden vertaaminen
- Mallin arviointi & validointi

Identifiointikokeen suunnittelu

- Hyvä koe tuottaa paljon informaatiota systeemistä
- Suunnitteluongelmia
 - mitä signaaleja mitataan?
 - sopiva näytteenottoväli
 - sisäänmenon / herätteen valinta

Perusajatuksia

- Millä tahansa menetelmällä tuotettu parametriestimaatti kuvaa systeemiä parhaalla mahdollisella tavalla *identifiointikokeen olosuhteissa*
- Malli antaa systeemin hyvän kuvauksen jos
 1. Mallin parametrisointi sallii sen ja malli on rakenteellisesti identifioituva
 2. Identifiointikoe on onnistunut
- Parametriestimaatin kovarianssimatriisi riippuu käänteisesti ennusteen gradientista \Rightarrow Pieni varianssi, jos ennuste on herkkä parametrille
 - Valitse y s.e. \hat{y} on mahdollisimman herkkä θ :n suhteen

Näytteenottovälin valinta

- Korkea näytteenottotaajuus vs. systeemin dynamiikka
=> liian paljon dataa
- Matala näytteenottotaajuus vs. systeemin dynamiikka
=> liian vähän dataa
- Parempi liikaa kuin liian vähän dataa
 - Onko käytännössä mahdollista?
- Peukalosääntöjä
 - Sopiva näytteenottotaajuus on noin 10 X kiinnostava taajuuskaista
 - Askelvaste => 5-8 näytettä nousuaikana
- Aluksi liikaa dataa => voidaan uudelleennäytteistää

Sisäänmenon valinta 1/2

- Sisäänmeno $u(t)$ herättää systeemin
- Esim. $u(t) = A \sin \omega t$ antaa tietoa (vahvistus & vaihekulma) vain yhdestä taajuudesta \Rightarrow harvoin riittävä
- $u(t)$:n oltava siis taajuussisällöltään rikas
- Taajuussisällön ohjenuorana taajuustulos (diasetti #9, dia #15)
 - Pääosa signaalin energiasta niillä taajuuksilla, joilla mallille halutaan hyvä suorituskyky
- Sisäänmenon energiasisältö oltava mallintamisen kannalta tärkeillä taajuuksilla, esim. Boden diagrammin taitekohdat

Sisäänmenon valinta 2/2

- Hyvä signaali on esim. satunnaisesti 2 arvon välillä vaihteleva signaali (ks. laskari #10, tehtävä #3)
 - taajuuspainotus voidaan valita säätämällä vaihtotodennäköisyyttä
- Vaihtoehto satunnaiselle signaalille PRBS (PseudoRandom Binary Sequence (ks. laskari #10, tehtävä #3)
 - Deterministinen signaali pitkällä periodilla

Signaalin jatkuvasti herättävyys – määritelmiä taajuustasossa

Määritelmä:

Signaali $u(t)$ (spektri $\Phi_u(\omega)$) on **jatkuvasti herättävä (persistently exciting, p.e.)** astetta / kertalukua n



$\Phi_u(\omega) > 0$ ainakin n :ssä pisteessä välillä $(-\pi, \pi)$ (ol. $T=1$)

- Määritelmä: $u(t)$ on **jatkuvasti herättävä**, jos $\Phi_u(\omega) > 0$ melkein kaikkialla välillä $(-\pi, \pi)$
 \Rightarrow Äärelliset lineaariset suotimet eivät vaikuta jatkuvasti herättävyyteen

Määritelmä aikatasossa

- $u(t)$ p.e. astetta $n \Leftrightarrow$ autokovarianssimatriisi (vrt. Wiener-Hopfin yhtälö)

$$\bar{R}_n = \begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(1) & \dots & R_u(n-1) \\ R_u(1) & R_u(0) & \dots & R_u(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_u(n-1) & R_u(n-2) & \dots & R_u(0) \end{bmatrix}$$

on ei-singulaarinen

- Yksikköimpulssi: p.e. astetta 0
- Yksikköaskel : p.e. astetta 1
- Siniaalto: voidaan osoittaa, että $A \sin \omega_0 t$:n spektri on $A^2/4[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)] \Rightarrow$ p.e. astetta 2
- Valkoinen kohina: $R_n = \lambda I_{n-1} \Rightarrow$ p.e. (seuraus: kaikki ARMA-prosessien ulostulot p.e.)
- PRBS: p.e. astetta M , $M =$ jakson pituus

Käytännöllinen tulos

Olkoon **kohinaisen** systeemin siirtofunktio $G(q, \theta)$ muotoa $B(q, \theta)/F(q, \theta)$ ja olkoot polynomien asteluvut n_b ja n_f .

=>

Polynomien kertoimet voidaan estimoida sisäänmenolla $u(t)$, joka on jatkuvasti herättävä vähintään astetta $n_b + n_f$

Peukalosääntö:

Kertalukua n olevan systeemin parametrien identifiointiin tarvitaan signaali, joka on p.e. vähintään astetta $2n$

Suljetun silmukan systeemien identifiointi

- Sisäänmeno määräytyy ainakin osin ulostulosta
 - Köyhdyttää sisäänmenoa => hankaluuksia
- Käytännössä toimivien prosessien säätöä ei voida identifioinnin ajaksi keskeyttää
- Vähennä säätöä jos mahdollista
- Korrelaatio- ja spektraalianalyysi ei toimi takaisinkytketyssä järjestelmässä
- Parametriset mallit (rakenteellinen & black box) parempia, kun...
 - Referenssisignaali sisäänmenoksi

Identifiointiprosessi kokonaisuutena

Alustavia kokeita

- Koesuunnittelu, identifiointikoe
- **Mittaustulosten / datan esikäsittely**
- Ei-parametriset menetelmät
 - transientti-, korrelaatio-, taajuus-, Fourier- ja spektraalianalyysi => askel-, impulssi- ja taajuusvaste; ajatuksia esim. kertaluvuista
- Mallirakenteen (rakenneparametrit) valinta
- Parametrien estimointi
- Mallirakenteiden vertaaminen
- Mallin arviointi & validointi

Mittaustulosten / datan esikäsittely

- Koe suoritettu, data kerätty - datan esikäsittely ennen identifiointia
- Piirros kuva
 - outlierit
- Keskiarvota
- Korkeataajuisien häiriöiden suodattaminen (laskostuminen)
- Poista outlierit
 - Neliöllinen hyvyyskriteeri painottaa outliereita
- Edustavan datasetin valinta - jako estimointi- ja validointidataan

Esisuodatus

- Parametristimointi voidaan tulkita taajuusvasteen sovittamiseksi erään taajuusnormin (diasetti #9, dia #15) mielessä
- Esisuodatetaan $u(t)$ ja $y(t)$ $L(q)$:lla \Rightarrow taajuusnormiin tulee komponentti $|L(e^{i\omega})|^2$ mukaan
 - valitaan $L(\cdot)$ kaistapäästösuodattimeksi \Rightarrow voidaan jälkikäteen valita sovituksessa painotettavat taajuudet!
 - Ks. laskari #10, tehtävä #4

Identifiointiprosessi kokonaisuutena

Alustavia kokeita

- Koesuunnittelu, identifiointikoe
- Mittaustulosten / datan esikäsittely
- Ei-parametriset menetelmät:
 - transientti-, korrelaatio-, taajuus-, Fourier- ja spektraalianalyysi => askel-, impulssi- ja taajuusvaste; ajatuksia esim. kertaluvuista
- **Mallirakenteen (rakenneparametrit) valinta**
- Parametrien estimointi
- **Mallirakenteiden vertaaminen**
- Mallin arviointi & validointi

Mallirakenteen valinta

- Rakenteellinen – black box?
 - Rakenteellinen vaikea tuottaa, mutta usein vähemmän estimoitavaa => ”tarkempia” tuloksia
- Black-box: mallirakenne?
 - Estimointimenetelmä (ARX –PNS, muut vaativat iteratiivisia)
 - *Kertaluvut*
 - Niukkuusperiaate (parsimony principle): valitse kahdesta tasaväkisestä mallista se, jossa on vähemmän parametreja
 - Miksi? Voidaan osoittaa, että ylimääräiset parametrit lisäävät ennustevirheen varianssia
- Käyttötarkoitus; mallinnusosaaminen

Hankel-matriisin testaus 1/2

- N:n kertaluvun järjestelmän impulssivaste $h(t)$ riippuu lineaarisesti n :stä edellisestä arvosta $h(t-1), \dots, h(t-n)$
 - Esim. $y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2)$
 - $u(0) = 1, u(i) = 0$ kaikilla $i > 0$; $y(0) = y(-1) = y(-2) = 0$
- \Rightarrow Vaste $h(1) = b_1$; $h(2) = -a_1 h(1) + b_2$; $h(3) = -a_1 h(2) - a_2 h(1)$; \dots ; $h(t) = -a_1 h(t-1) - a_2 h(t-2)$ kaikilla $t > 2$
-

Määritellään Hankel-matriisi:

$$H(l, k) = \begin{bmatrix} h(k) & h(k+1) & \dots & h(k+l-1) \\ h(k+1) & h(k+2) & \dots & h(k+l-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(k+l-1) & h(k+l-2) & \dots & h(k+2l-2) \end{bmatrix}$$

Hankel-matriisin testaus 2/2

- Järjestelmän kertaluku $n \Rightarrow H(l,k):n$ rangi = n kaikilla $l \geq n$
- Testaus: $\det(H(l,k))=0$ kun $l > n$
- Kohinaa \Rightarrow testataan perättäisten determinanttien suhteita: $D_1 = |\det(H(l,k))| / |\det(H(l+1,k))|$
- Determinantit voidaan keskiarvottaa yli $k:n$
- $l=n$ maksimoi $D_1:n$
- Käytännössä:

Korrelaatioanalyysi \Rightarrow Impulssivaste

\Rightarrow Hankel-matriisi $\Rightarrow D_1 \Rightarrow n$

Tulomomenttimatriisin testaus

- Olkoot järjestelmän kertaluku n ja u pe vähintään $n+1$
- Määr. $U(l)$:

$$U(l) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} y(l) & \dots & y(1) & u(l) & \dots & u(1) \\ y(l+1) & \dots & y(2) & u(l+1) & \dots & u(2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N) & \dots & y(N-l+1) & u(N) & \dots & u(N-l+1) \end{array} \right]$$

- Hae suurin $l = l^*$ jolla $U(l)$ vielä täyttä rangia $\Rightarrow n=l^*$
 - Käytännössä hae suurin $l=l^*$ jolla $U(l)^T U(l)/N$ (tulomomenttimatriisi) täyttä rangia $\Rightarrow n=l^*$
- Käytännössä:
 - 1) Tee koe sopivalla herätteellä
 - 2) Etsi l^* eli n

Mallirakenteiden vertaaminen

- Helppoa – verrataan jäännösneliösummia
- Vai hetkinen... kun lisään tarpeeksi monta parametria, siitä tulee nolla
 - Tietyn rajan jälkeen malli alkaa sovittautua datan kohinaan
- Kupletin juoni ei olekaan estimointidataan sovittaminen vaan ilmiön kuvaaminen
- Ristiinvalidointi
 - Mallin suorituskyvyn (esim. ennustuskyvyn) arviointi riippumattomalla datalla
- Kvantitatiivinen analyysi (vrt. lineaariset regressiomallit):
 - Pieneneekö jäännösneliösumma tilastollisesti merkitsevästi, kun malliin lisätään parametri?
 - Informaatiokriteerit: sakotetaan parametrien lisäämisestä

χ^2 -testi

- Olkoot M_1 ja M_2 kaksi hierarkkista mallirakennetta (ts. M_1 saadaan M_2 :sta poistamalla parametri/parametreja)
- Ol. että kumpikin mallirakenne kuvaa systeemin niin, että ennustevirheet ovat valkoista kohinaa
- Tällöin testisuure $\chi = N(V_N^1 - V_N^2) / V_N^2$ on asympotoottisesti χ^2 - jakautunut vapausasteella $p_2 - p_1$
 - $p_i =$ parametrien lkm mallissa i
 - V_N^i jäännösneliösumman arvo mallilla i
 - N havaintojen lukumäärä
- Idea: poikkeako testisuure nolasta tilastollisesti merkitsevästi kun siirrytään mallista 1 malliin 2?

Informaatiokriteerit

- Jäännösneliösumma vs. parametrien lukumäärä d
- Tyypillinen funktionaalinen muoto: $W_N = \beta(d, N) V_N$
 - $V_N =$ parametreistä (d kpl) riippuva ennustevirheiden neliösumma
 - β kasvaa kun d kasvaa (ja vähenee kun N kasvaa)
- Valitaan malli, jolle W_N on pienin

Informaatiokriteereitä

- Akaiken informaatiokriteeri

$$AIC = (1 + 2d/N)V_N$$

- Kullback-Leibler –etäisyydellä (informaatioetäisyys) voidaan mitata kahden tn-jakauman etäisyyttä
- AIC:n minimoiva malli minimoi mallin ja systeemin informaatioetäisyyden

- Final Prediction Error

$$FPE = (1 + d/N) / (1 - d/N) V_N / N$$

- Keskimääräinen estimaatti ennustevirheen varianssille, kun estimaatti lasketaan muulla kuin mallin identifiointiin käytetyllä datalla

- Rissanen minimipituuskriteeri

$$MDL = (1 + 2d \log N / N) V_N$$

- Kuvaa tilaa, joka tarvitaan mallin sisältämän informaation (mallin parametrit + ennustevirheet) tallentamiseksi pienimpään mahdolliseen tilaan