Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-E2129 Systeemien identifiointi

1. harjoituksen ratkaisut

1. Tarkastellaan maita X ja Y. Olkoon näiden varustelutaso $x(t)$ ja $y(t)$ sekä puolustusmyönteisyys $s_x(t)$ ja $s_y(t)$ hetkellä t. Mikäli maa i on puolustusvastainen, niin $s_i(t)$ on negatiivinen, muuten positiivinen.

   Oletetaan, että varustelunopeus on suoraan verrannollinen puolustusmyönteisyyteen ja naapurimaan varustelutasoon sekä kääntäen verrannollinen varustelukuluihin, jotka ovat verrannolliset varustelutasoon. Näin saadaan malli

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= s_x(t) + f_x y(t) - u_x x(t)\\ \dot{y}(t) &= s_y(t) + f_y x(t) - u_y y(t),\end{aligned}$$

   missä f_i:t ja u_i:t ovat positiivisia verrannollisuuskertoimia. Systeemi voidaan kirjoittaa myös vektorimuodossa:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-u_x & f_x\\ f_y & -u_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}s_x(t)\\ s_y(t)\end{pmatrix}$$

   Differentiaaliyhtälömallin avulla voidaan arvioida millä varustelutason alkuarvoilla ja verrannollisuuskertoimien arvoilla päädytään varustelukierteeseen tai stabiloidutaan johonkin tasapainotilaan. Tarkastalu voidaan suorittaa joko simuloimalla (ratkomalla malli numeerisesti) tai yksinkertaisissa tapauksissa analyyttisesti.

   Esimerkiksi tasapainotilat saadaan ratkaistua yhtälöstä

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 0\\ \dot{y}(t) &= 0.\end{aligned}$$

   Tämän ratkaisuksi saadaan

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-u_x & f_x\\ f_y & -u_y\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-s_x\\ -s_y\end{pmatrix},$$

   kun oletetaan, että $s_i(t) = s_i$ on vakio ja, että tarvittava käänteismatriisi on olemassa.

2. Bakteerikannan kokonaiskasvunopeus on $\dot{b}(t)$ ja kasvunopeus bakteeriyksikköä kohden $\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}$, jolloin olettamuksista (i) ja (ii) saadaan, että

$$\frac{\dot{b}(t)}{b(t)} = f(u(t)) \approx \begin{cases} k_1 u(t), & \text{kun } u(t) \text{ on "pieni";} \\ k_2, & \text{kun } u(t) \text{ on "iso".} \end{cases}$$

Eräs mahdollinen approksimaatio funktiolle f on

$$f(u(t)) \approx k_2 \frac{u(t)}{u(t) + \frac{k_2}{k_1}}.$$

Olettamuksesta (iii) saadaan lisäksi, että

$$\dot{u}(t) = -k_3 \dot{b}(t),$$

jolloin bakteerisysteemiä kuvaamaan saadaan differentiaaliyhtälömalli

$$\begin{aligned} \dot{b}(t) &= f(u(t))b(t), \\ \dot{u}(t) &= -k_3 f(u(t))b(t). \end{aligned}$$

3. a) Muodostetaan differenssiyhtälösysteemi kuvaamaan tehtävän systeemiä. Tässä tehtävässä aika on oletettu diskreetiksi suureeksi.

   Olkoon hierarkiassa tasoja N kappaletta ja $K_j(t)$ ja $I_j(t)$ ovat pätevien ja epäpätevien työntekijöiden määrä tasolla j sekä $u(t)$ uusien työntekijöiden määrä hetkellä t. Ensimmäisellä tasolla pätee

$$\begin{aligned} K_1(t+1) &= 0.6K_1(t) + 0.1I_1(t) + 0.9u(t) \\ I_1(t+1) &= 0.7I_1(t) + 0.1u(t). \end{aligned}$$

   Tasoilla $j \in \{2, \dots, N-1\}$ vastaavasti

$$\begin{aligned} K_j(t+1) &= 0.6K_j(t) + 0.1I_j(t) + \frac{2}{3}0.3K_{j-1}(t) \\ I_j(t+1) &= 0.7I_j(t) + \frac{1}{3}0.3K_{j-1}(t) + 0.1I_{j-1}(t). \end{aligned}$$

   Koska tasolta N ei voi enää ylentyä, saadaan tälle tasolle

$$\begin{aligned} K_N(t+1) &= 0.9K_N(t) + 0.1I_N(t) + \frac{2}{3}0.3K_{N-1}(t) \\ I_N(t+1) &= 0.8I_N(t) + \frac{1}{3}0.3K_{N-1}(t) + 0.1I_{N-1}(t). \end{aligned}$$

   Merkitään

$$x_j(t) = \begin{pmatrix} K_j(t) \\ I_j(t) \end{pmatrix},$$

jolloin differenssiyhtälömallimme voidaan kirjoittaa muodossa

$$x_1(t+1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}}_{=A} x_1(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{pmatrix}}_{=b} u(t)$$

$$x_j(t+1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}}_{=A} x_j(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}}_{=C} x_{j-1}(t), j \in \{2, \dots, N-1\}$$

$$x_N(t+1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}}_{=A_N} x_N(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}}_{=C} x_{N-1}(t)$$

b) Ks. Excel-malli H1T3.xls, jossa on valittava hierarkioiden työtekijämäärät alussa. Huomataan, että työntekijöiden määrät eri hierarkian tasoilla stabiloituvat, kun t kasvaa. Varioimalla uusien työntekijöiden määrää havaitaan, että pätevien työmntekijöiden suhde ei ole kovin herkkä $u(t)$:n muutoksille. Erityisesti suurilla t:n arvoilla pätevien työntekijöiden osuus näyttäisi säilyvän samana, vaikka $u(t)$:a muutetaan.

c) Kirjoitetaan systeemimme muodossa

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}\hat{u}(t), \\ \hat{y}(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}\hat{u}(t), \end{aligned}$$

missä $\hat{y}(t)$ on systeemistä havaittava tai mitattava suure. Yleensä $\hat{u}(t)$:a kutsutaan ohjaukseksi ja $\hat{x}(t)$:a tilaksi.

Valitaan $\hat{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix}$, ja $\hat{u}(t) = u(t)$ jolloin

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & & & \\ C & \ddots & & \\ & \ddots & A & \\ & & C & A_N \end{pmatrix}$$

ja

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\hat{A}$ on $2N \times 2N$ matriisi ja $\hat{B}$ $2N \times 1$ vektori. Jos halutaan mitata suoraan tiloja, ts. $\hat{y} = \hat{x}$ valitaan luonnollisesti $\hat{C} = I$ ja $\hat{D} = 0$. Ks. toteutuksen Simulink-malli LH1T3_mdl.slx, ja Matlab-skripti LH1T3_m.m joka muodostaa matriisit $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ ja $\hat{D}$, ajaa simulaation sekä piirtää kuvaajat.

d) Mallissa annetut prosenttiosuudet ovat vakioita. Siten mallissa palkkaus ei vaikuta pätevien ja epäpätevien suhteisiin, eikä malli ole riittävä palkkaustrategian optimointiin. Jos tehtävässä annetut prosenttiarvot oletettaisiinkin esimerkiksi funktioiksi seuraavan tason palkasta voitaisiin palkkaustrategiaa optimoida.

Mahdollisia optimointikriteereitä olisivat esimerkiksi pätevien osuudet eri tasoilla ja kokonaispalkkakustannukset.

4. a) Olkoot $y(t)$ ja $x(t)$ veren insuliini- ja sokeripitoisuudet hetkellä t. Merkitään insuliinipistoksesta saatavan insuliinin määrä $w(t)$:llä ja ruokailusta saatavan sokerin määrä $z(t)$:llä.

   Kirjoitetaan ensin differentiaaliyhtälömalli insuliinipitoisuudelle olettamuksista (i)-(iii):
$$\dot{y}(t) = b_1 \max\{x(t) - x_0, 0\} - b_2 \max\{y(t), 0\} + b_3 w(t),$$
   missä b_i:t ovat positiivisia verrannollisuuskertoimia. Vastaavasti otaksumista (iv)-(vi) saadaan
$$\dot{x}(t) = -a_1 x(t) y(t) + a_2 \max\{x_0 - x(t), 0\} + a_3 z(t),$$
   missä a_i:t ovat positiivisia verrannollisuuskertoimia.

   b) Aseta mallissa $b_3 = 0$, jolloin insuliinipistoksia ei oteta. Muiksi verrannollisuuskertoimet voit asettaa esimerkiksi ykkösiksi. Alkutilaksi ota $x(0) = x_0 = 1$, $y(0) = 0$. Tämä on systeemin tasapainotila, minkä näet esimerkiksi valitsemalla mallissa lisäksi $z(t) = 0$ ja simuloimalla systeemiä.

   Tarkastele systeemin käyttäytymistä erilaisilla impulssimuotoisilla ruokailuprofiileilla. Tuloksena saat jaksollisia ratkaisuja, joissa elimistö ruokailun jälkeen erittää insuliinia veren sokeripitoisuuden pienentämiseksi. Veren sokerin saavuttaessa arvon x_0 insuliinin eritys lakkaa ja maksa tuottaa sokeria tasapainotilan saavuttamiseksi.

   c) Aseta nyt b-kohdan mallissa $b_1 = 0$, koska insuliinipotilas ei tuota insuliinia, ja $b_3 \neq 0$. Kokeile varioida insuliinipistoksen ja ruokailun välistä vaihe-eroa. Paras tulos saadaan, kun insuliini otetaan ruokailun yhteydessä, koska tällöin tarvitaan insuliinia veren sokeripitoisuuden laskemiseksi.

5. Etsitään siis matriisit A, B, C ja D siten, että
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}$$
   Matriisin A koko on $2k \times 2k$, matriisin B $2k \times k$, matriisin C $k \times 2k$ ja matriisin D $k \times k$. Jaetaan nämä $k \times k$ lohkoihin seuraavasti.
$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\\ B &= \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}\\ C &= \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}\\ D &= D\end{aligned}$$

Koska $x = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$, $u = f$ ja $y = q$, saadaan

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} f(t) \\
q(t) &= \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} + Df(t).
\end{aligned}$$

Lisäksi tiedetään, että $M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = f$, eli $\ddot{q} = -M^{-1}D\dot{q} - M^{-1}Kq + M^{-1}f$. Tällöin saadaan seuraavat yhtälöt.

$$\begin{aligned}
\dot{q}(t) &= A_{11}q(t) + A_{12}\dot{q}(t) + B_1 f(t) \\
-M^{-1}D\dot{q} - M^{-1}Kq + M^{-1}f &= A_{21}q(t) + A_{22}\dot{q}(t) + B_2 f(t) \\
q(t) &= C_1 q(t) + C_2\dot{q}(t) + Df(t).
\end{aligned}$$

Tästä voidaan ratkaista

$$\begin{matrix}
A_{11} = 0, & A_{12} = I, & B_1, = 0 \\
A_{21} = -M^{-1}K, & A_{22} = -M^{-1}D, & B_2 = M^{-1}, \\
C_1 = I, & C_2 = 0, & D = 0,
\end{matrix}$$

eli

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{pmatrix} \\
B &= \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{pmatrix} \\
C &= \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \\
D &= 0
\end{aligned}$$