

MS-E2129 Systemien identifiointi

1. laskuharjoitus

1. Mikäli maa on huonommin varustautunut sotilaallisesti kuin sen (mahdollisesti vihamielinen) naapurimaa, arvellaan usein, että maiden välille saattaa puhjeta sota. Pahimmillaan tilanne johtaa kilpavarustelukierteeseen, jollaisia onkin maailmassa jo nähty useita. Richardsonin yksinkertainen varustelumalli olettaa seuraavien tekijöiden vaikuttavan maan varusteluvauhtiin:

- (i) puolustusmyönteiset ja -kielteiset mielipiteet maassa
- (ii) vihamielisiksi arvioitujen maiden varustelutaso
- (iii) omat varustelukulut

Muotoile nämä tekijät huomioiva varustelumalli kahden kilpailevan maan tapauksessa. Mieti, millaisiin käyttötarkoituksiin malli soveltuu

2. Bakteerikannan kasvu riippuu paitsi kannan koosta myös kannan saatavilla olevasta ravinnosta. Kokeissa on havaittu seuraavaa:
 - (i) Kun ravintoa on niukasti, kannan kasvunopeus (lisäys aika- ja bakteeriyksikköä kohti) on verrannollinen ravintomäärään.
 - (ii) Kun ravintoa on paljon, kannan kasvunopeus on likimäärin vakio.
 - (iii) Ravinnonkulutus aikayksikössä on verrannollinen kannan kokonaiskasvuun aikayksikössä.

Olkoot $b(t)$ kannan koko ja $u(t)$ ravinnon määrä hetkellä t . Muotoile differentiaaliyhtälömalli kannan kasvulle.

3. **Peterin periaate** on eräs laeista, joiden väitetään ohjaavan modernia yhteiskuntaa. Sen mukaan hierarkkisessa organisaatiossa, esim. suuressa yrityksessä, ihmiset ylenevät kunnes he saavuttavat tason, jolla he ovat epäpäteviä. Näinollen tällaiset organisaatiot koostuvat lähinnä tehtäviinsä epäpätevistä ihmisistä. Tarkastellaan yritystä, jossa on tietty määrä hierarkkisia tasoja. Jokaisella tasolla on työntekijöitä, jotka ovat joko päteviä tai epäpäteviä. Oletetaan työntekijöiden urakehitys seuraavanlaiseksi:

- (i) Pätevistä työntekijöistä 30% ylennetään vuosittain seuraavalle tasolle, jossa heistä $2/3$ on edelleen päteviä mutta $1/3$ epäpäteviä. 10% lopettaa, ja loput 60% pysyvät samalla tasolla, jossa he säilyvät pätevinä.
- (ii) Epäpätevistä työntekijöistä 10% ylennetään vuosittain seuraavalle tasolle, jossa he ovat edelleen epäpäteviä. 10% epäpätevistä päteviytyy esim. sisäisen koulutuksen kautta, 10% lopettaa ja 70% pysyy epäpätevinä omalla tasollaan.
- (iii) Kaikki uudet työntekijät aloittavat hierarkian alimmalta tasolta. Uusista työntekijöistä 90% on päteviä ja 10% epäpäteviä.

Olkoot $K_j(t)$ ja $I_j(t)$ pätevien ja epäpätevien lukumäärä hierarkian tasolla j vuonna t , ja olkoon $u(t)$ uusien työntekijöiden lukumäärä vuonna t .

- a) Muodosta malli joka kuvaa $K_j(t)$:n ja $I_j(t)$:n j :n ja t :n funktiona.
 - b) Muotoile malli taulukkolaskimella (oletetaan $j = 10$, $t = 1, \dots, 20$). Kokeile yllä lueteltujen prosenttiosuuksien pienten muutosten vaikutusta pätevien ja epäpätevien määrien kehitykseen. Tutki vuosittaisten uusien työntekijöiden lukumäärän vaikutusta pätevien ja epäpätevien suhteeseen hierarkiassa.
 - c) Muotoile malli Simulinkillä ja tutki, millaiseen tasapainotilaan malli asettuu erilaisilla vakio-ohjauksilla $u(t) = u$.
 - d) Mieti, miten mallilla voitaisiin määrätä optimaalinen palkkausstrategia. Onko malli riittävä tähän käyttötarkoitukseen?
4. Erään mallin mukaan insuliini- ja sokerimäärät ihmisen veressä vaihtelevat seuraavasti tasapainotilan, jossa sokeria on veressä määrä x_0 ja insuliinia 0, ympärillä, seuraavasti (yksinkertaisuuden vuoksi emme ota kantaa mittayksiköihin):
- (i) Jos verensokeri nousee yli x_0 :n, erittyy vereen insuliinia sokeriylimäärään verrannollisella nopeudella.
 - (ii) Insuliinilla on rajallinen vaikutusaika: puolet veren insuliinista deaktivoituu 10-25 minuutissa.
 - (iii) Diabeetikko ottaa insuliinia lisäksi funktion $w(t)$ mukaisen määrän; $w(t)$ kuvaa vuorokautista insuliiniannostusprofiilia.
 - (iv) Oletetaan, että verensokeri vähenee suhteessa verensokerin ja insuliinimäärän tuloon.
 - (v) Mikäli sokeritaso laskee esim. liikunnan vuoksi alle tasapainotason x_0 , vapautuu maksasta sokeria. Vapautuvan sokerin määrä oletetaan verrannolliseksi sokerialimäärään.
 - (vi) Varsinainen verensokerin lisääntyminen tapahtuu syömisen ja juomisen kautta. Tätä kuvataan funktiolla $z(t)$.
- a) Muotoile matemaattinen malli veren insuliini- ja sokeripitoisuuksille.
 - b) Muotoile lohkoaviomalli Simulinkillä ja simuloi mallilla terveen ihmisen verensokeri-insuliinidynamiikkaa. Kuvaa aterioita sopivilla pulsseilla $z(t)$:ssä.

- c) Simuloi seuraavaksi insuliinipotilaan dynamiikkaa olettaen, että insuliinipotilas ei itse tuota insuliinia lainkaan. Kokeile erilaisia insuliiniprofileja $w(t)$. Miten $w(t)$:n kannattaisi suhtautua $z(t)$:hen, jotta verensokeripitoisuus olisi mahdollisimman tasainen?

5. Tarkastellaan differentiaaliyhtälömallia

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = f,$$

missä $q(t) \in \mathbb{R}^k$ sekä M , D ja K ovat $k \times k$ matriiseja. Funktio $f(t) \in \mathbb{R}^k$ on ulkoinen ohjaus. Olettaen, että M on kääntyvä, kirjoita lineaarinen tilaesitys systeemille, missä tilavektorina $x = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$, ohjauksena $u = f$ ja mitattava suure $y = q$. Eli kirjoita systeemi muodossa

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du. \end{aligned}$$