Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-E2129 Systeemien identifiointi

2. harjoituksen ratkaisut

1. Yhtälö voitaisiin ratkaista suoraankin, mutta käytetään Laplace-muunnosta tehtävän ratkaisemisessa. Idea on se, että muunnoksen avulla diff. yhtälö saadaan kirjoitettua ns. Laplace-tasossa algebralliseksi yhtälöksi. Muunnos määritellään seuraavasti:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = Y(s).$$

Muunnoksen toimivuus perustuu oleellisesti siihen, että se on lineaarinen ja, että $\mathcal{L}\{y^n(t)\} = s^nY(s) - [s^{n-1}y(0) + \ldots + y^{n-1}(0)]$, missä $y^{(i)}(0)$ on y:n i:nnen derivaatan alkuarvo.

Laplace-muunnetaan nyt tarkasteltava diff. yhtälö puolittain:

$$\mathcal{L}\{y''(t) + 2y'(t) + 5y(t)\} = \mathcal{L}\{\sin(3t)\}.$$

Lineaarisuuden perusteella

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + 2\mathcal{L}\{y'(t)\} + 5\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\sin(3t)\}$$

ja

$$\underbrace{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2[sY(s) - y(0)] + 5Y(s)}_{=s^2Y(s)+2sY(s)+5Y(s)-s-1} = \frac{3}{s^2+9},$$

missä $\sin(3t)$:n Laplace-muunnos saadaan integroimalla tai suoraan muunnostaulukoista. Siten saamme ratkaistua $Y(s)$:n algebrallisesti:

$$Y(s) = \frac{3}{(s^2+9)(s^2+2s+5)} + \frac{s+1}{s^2+2s+5}.$$

Tästä saadaan tehtävälle ratkaisu käänteismuuntamalla takaisin aikatasoon:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s^2+9)(s^2+2s+5)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2s+5}\right\},$$

koska myös käänteismuunnos on lineaarinen. Tämä on nyt kirjoitettava muotoon, josta käänteismuuntaminen taulukon avulla on mahdollista.

Jälkimmäinen termi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\} = e^{-t}\cos(2t).$$

Edellinen termi onkin vähän vaikeampi ja se on kirjoitettava ensin osamurtokehitelmäksi:

$$\frac{3}{(s^2+9)(s^2+2s+5)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5}.$$

Tämän yhtälön oikea puoli voidaan laventaa vasemman puolen kanssa samannimiseksi ja valitsemalla vakiot s.e. molemmat puolet ovat identtiset:

$$\begin{aligned}\frac{3}{(s^2+9)(s^2+2s+5)} &\equiv \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5}\\ &= \frac{(As+B)(s^2+2s+5)+(Cs+D)(s^2+9)}{(s^2+9)(s^2+2s+5)}\\ &= \frac{(A+C)s^3+(2A+B+D)s^2+(5A+2B+9C)s+5B+9D)}{(s^2+9)(s^2+2s+5)}\\ &\Rightarrow \begin{cases} A+C &= 0\\ 2A+B+D &= 0\\ 5A+2B+9C &= 0\\ 5B+9D &= 3\end{cases}\end{aligned}$$

Siten saadaan, että $A = \frac{-3}{26}$, $B = \frac{-3}{13}$, $C = \frac{3}{26}$ ja $D = \frac{6}{13}$, joten

$$\frac{3}{(s^2+9)(s^2+2s+5)} = \frac{3}{26}\left(\frac{-s-2}{s^2+9} + \frac{s+4}{s^2+2s+5}\right).$$

Tästä summasta saadaan nyt käänteismuunnettua taulukon avulla ratkaisuksi

$$y(t) = e^{-t}\cos(2t) + \frac{3}{26}\left(-\cos(3t) - \frac{2}{3}\sin(3t) + e^{-t}\cos(2t) + \frac{3}{2}e^{-t}\sin(2t)\right).$$

2. a) Merkitään yhtälön oikeaa puolta $v(t) = 3u'(t) + 2u(t)$ ja Laplace-muunnetaan systeemi:

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 4Y(s) = V(s),$$

josta saadaan

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}V(s) = \frac{1}{(s+2)^2}V(s) = G(s)V(s).$$

Ohjatun vasteen laskemisessa $u(t) = e^{-3t}$, jolloin

$$v(t) = 3u'(t) + 2u(t) = -7e^{-3t},$$

jonka Laplace-muunnos

$$V(s) = \frac{-7}{s+3}.$$

Tällöin

$$Y(s) = G(s)V(s) = -7\frac{1}{(s+2)^2(s+3)}.$$

Tämä on vielä käänteismuunnettava, joten kirjoitetaan $Y(s)$ osamurtokehitelmäksi

$$Y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+3},$$

jossa tulee olla $A = 7, B = -7$ ja $C = -7$. Tässä muodossa esitettynä voidaan käänteismuunnos laskea taulukosta, jolloin

$$y(t) = 7(e^{-2t} - te^{-2t} - e^{-3t}).$$

b) Tilayhtälömuotoon siirtyäksemme otetaan käyttöön apumuuttujat $x_1 = y$ ja $x_2 = y'$, jolloin $x_1' = y'$ ja $x_2' = u$, mikä on vektorimuodossa

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Alkuehtonamme oli

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

joten systeemi on esitetty nyt muodossa

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

missä

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tämän muotoisen diff. yhtälön ratkaisu on

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

missä e^{At} voidaan laskea sarjakehitelmästä

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(At)^k.$$

Tässä tehtävässä tuo sarja on helppo laskea, koska $A^k = 0 \; \forall k \geq 2$, jolloin

$$e^{At} = I + At = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Siten

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau)d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 1-t \\ -1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} t-\tau \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Kun $u(t) = 0$, saadaan vapaaksi vasteeksi

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1-t \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Kun $u(t) = 1$, niin vasteeksi saadaan integroimalla

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1-t+0.5t^2 \\ -1+t \end{bmatrix}.$$

3. a) Systeemiä kuvaava differentiaaliyhtälö saadaan suoraan Kirchhoffin ja Ohmin laeista. Ohmin lain mukaan jännitehäviö vastuksessa on $Ri(t)$, käämissä $L\frac{di(t)}{dt}$ ja epälineaarisessa komponentissa $ki(t)^2$. Kirchhoffin lain mukaan puolestaan piirissä jännitehäviöt summautuvat nollaksi, joten saadaan

$$u(t) - Ri(t) - L\frac{di(t)}{dt} - ki(t)^2 = 0$$

eli differentiaaliyhtälömalliksi tulee

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{k}{L}i(t)^2 + \frac{1}{L}u(t) = f(i(t), u(t)).$$

b) Ratkaistaan tasapainotila yhtälöstä

$$0 = \frac{di(t)}{dt} = f(i_0, u_0) = \frac{1}{L}(-Ri_0 - ki_0^2 + u_0),$$

josta saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisuna virran tasapainoarvoksi

$$i_0 = -\frac{R}{2k} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4k^2} + \frac{u_0}{k}}.$$

Linearisoidaan nyt systeemi tasapainotilan ympäristössä. Merkitään $\Delta i(t) = i(t) - i_0$ ja $\Delta u(t) = u(t) - u_0$. Tällöin linearisoitu systeemi on

$$\frac{d\Delta i(t)}{dt} = A\Delta i(t) + B\Delta u(t),$$

missä

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{\partial f}{\partial i}\right|_{i_0,u_0} = -\frac{R}{L} - \frac{2k}{L}i_0, \\ B &= \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{i_0,u_0} = \frac{1}{L}, \end{aligned}$$

joten haettu linearisoitu systeemi on

$$\frac{d\Delta i(t)}{dt} = -\frac{R + 2ki_0}{L}\Delta i(t) + \frac{1}{L}\Delta u(t).$$

c) Pienillä poikkeamilla tasapainotilasta linearisoitu systeemi käyttäytyy lähes kuten alkuperäinenkin. Suurilla poikkeamilla erot kasvavat, koska linearisoitu systeemi ei enää approksimoi alkuperäistä hyvin. Käytä tarkastelussa malleja lh2t3_nonlin.slx ja lh2t3_lin.slx.

4. a) Sijoitetaan $\dot{v}(t) = 0$ tehtäväpaperin ensimmäiseen differentiaaliyhtälöön. Saadaan, että

$$0 = F(t) - D(v(t), h(t)) - (m_0 + m(t))g = F(t) - Hv(t)^2 e^{-\beta h(t)} - (m_0 + m(t))g,$$

josta saadaan nopeudeksi

$$v = \sqrt{\frac{e^{\beta h}}{H}(F - (m_0 + m)g)},$$

missä on luonnollisesti oletettava, että työntövoima on riittävä, eli

$$F \geq (m_0 + m)g.$$

b) Valitaan tilavektoriksi

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ m(t) \\ h(t) \end{bmatrix},$$

ja sisäänmenoksi (ohjaukseksi)

$$u(t) = F(t).$$

Näillä merkinnöillä saadaan tehtäväpaperissa esitetty systeemi seuraavaan muotoon:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\frac{H}{m_0 + x_2(t)} x_1(t)^2 e^{-\beta x_3(t)} + \frac{1}{m_0 + x_2(t)} u(t) - g &&=: f_1(x(t), u(t)) \\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{c} u(t) &&=: f_2(x(t), u(t)) \\
\dot{x}_3(t) &= x_1(t) &&=: f_3(x(t), u(t))
\end{aligned}$$

Nyt siis tunnettiin työntövoimaprofiili, jolloin $u(t) = u^*(t)$ antaa tietyn ratkaisutrajektorin $x^*(t)$. Linearisoidaan systeemi nyt (u^*, x^*):n ympristössä. Merkitään $\Delta x(t) = x(t) - x^*(t)$ ja $\Delta u(t) = u(t) - u^*(t)$. Linearisoitu systeemi on siten muotoa

$$\Delta \dot{x}(t) = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t),$$

missä matriisit $A(t)$ ja $B(t)$ ovat $f(x(t), u(t))$:n Jacobin matriisit evaluoituna $(x(t) = x^*(t), u(t) = u^*(t))$:ssä. Siten

$$A_{ij}(t) = \left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_{x^*(t), u^*(t)}$$

ja

$$B_i(t) = \left.\frac{\partial f_i}{\partial u}\right|_{x^*(t),u^*(t)}.$$

A on siis 3×3 -matriisi ja $B(t)$ 3×1 -vektori, koska ohjaus on yksiulotteinen. Derivaatat voidaan myös kirjoittaa auki, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x^*(t),u^*(t)} &= -\frac{2Hx_1^*(t)}{m_0 + x_2^*(t)}e^{-\beta x_3^*(t)} \\
\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x^*(t),u^*(t)} &= \frac{Hx_1^*(t)^2 e^{-\beta x_3^*(t)} - u^*(t)}{(m_0 + x_2^*(t))^2} \\
\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right|_{x^*(t),u^*(t)} &= \frac{\beta H x_1^*(t)^2}{m_0 + x_2^*(t)}e^{-\beta x_3^*(t)} \\
\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x^*(t),u^*(t)} &= 0 \\
\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x^*(t),u^*(t)} &= 0 \\
\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right|_{x^*(t),u^*(t)} &= 0 \\
\left.\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right|_{x^*(t),u^*(t)} &= 1 \\
\left.\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right|_{x^*(t),u^*(t)} &= 0 \\
\left.\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right|_{x^*(t),u^*(t)} &= 0 \\
\left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{x^*(t),u^*(t)} &= \frac{1}{m_0 + x_2^*(t)} \\
\left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{x^*(t),u^*(t)} &= -\frac{1}{c} \\
\left.\frac{\partial f_3}{\partial u}\right|_{x^*(t),u^*(t)} &= 0.
\end{aligned}$$

Huomataan, että systeemi on todellakin aikavariantti, eli matriisit A ja B ovat aidosti ajan funktioita.

c) Kokeile mallissa lh2t4_nonlin.slx esimerkiksi seuraavia parametriarvoja: $m(0) = 1000, h(0) = 0, v(0) = 0, u^*(t) = 20000, g = 9.81, c = 1000, \beta = 0.1, H = 2000$. Kokeile myös työntövoimaprofiilia, jossa $u^*(t)$ on ensin ”iso”, jolloin raketti kiihdyttää. Tämän jälkeen ajetaan hetken aikaa u:lla, joka pitää yllä vauhtia. Tämän jälkeen työntovoima on nolla.

Ajettuasi epälineaarisen simulointimallin voit käyttää lineaarista mallia lh2t4_linearisoitu.slx. Se linearisoi systeemin sen ohjauksen u^* ympäristössä, jota käytit epälineaarisessa mallissa. Kokeile poikkeuttaa ohjausta tasapaino trajektorilta u^*.