Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-E2129 Systeemien identifiointi

3. harjoituksen ratkaisut

1. Vapaan vasteen löytämiseksi asetetaan ohjaukseksi $u(k) = 0$. Siten ratkaistavana on yhtälö

$$y(n+2) + \frac{5}{6}y(n+1) + \frac{1}{6}y(n) = 0.$$

Tehtävä voidaan ratkaista joko z-muunnoksella tai yritteellä. Ratkaistaan yhtälö ensin z-muunnoksen avulla. z-muunnos on Laplace-muunnoksen vastine diskreettiaikaisille systeemeille ja se määritellään seuraavasti

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n}.$$

z-muunnos on lineaarinen kuten Laplace-muunnoskin

$$\mathcal{Z}\left\{ax(n) + by(n)\right\} = aX(z) + bY(z).$$

Lisäksi z-muunnokselle pätee

$$\mathcal{Z}\left\{y(n+k)\right\} = z^k Y(z) - z^k y(0) - z^{k-1}y(1) - \ldots - zy(k-1).$$

Näistä saadaan z-muunnetuksi yhtälöksi

$$z^2Y(z) - z^2\underbrace{y(0)}_{=0} - z\underbrace{y(1)}_{=1} + \frac{5}{6}zY(z) - \frac{5}{6}z\underbrace{y(0)}_{=0} + \frac{1}{6}Y(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2Y(z) - z + \frac{5}{6}zY(z) + \frac{1}{6}Y(z) = 0$$

josta saadaan pulssinsiirtofunktioksi

$$Y(z) = \frac{6z}{6z^2 + 5z + 1}.$$

Ratkaisu saadaan käänteismuuntamalla $Y(z)$. Hajotetaan $Y(z)$ osamurtokehitelmällä

$$Y(z) = \frac{6z}{6z^2 + 5z + 1} = \frac{1}{6}\frac{6z}{(z+1/2)(z+1/3)} = \frac{A}{z+1/2} + \frac{B}{z+1/3}.$$

Tästä voidaan ratkaista vakiot A ja B seuraavasti

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{6z^2+5z+1} &= \frac{A(z+1/3)+B(z+1/2)}{(z+1/2)(z+1/3)} \\
&= \frac{(A+B)z+A/3+B/2}{(z+1/2)(z+1/3)}
\end{aligned}
$$

Tästä saadaan yhtälöpari

$$
\begin{cases} A/3+B/2=0, \\ A+B=1 \end{cases}
$$

Josta saadaan ratkaisuksi $A=3,\ B=-2$. Nyt käänteismuunnettavana on siis

$$
Y(z)=\frac{3}{z+1/2}-\frac{2}{z+1/3}
$$

Taulukkokirjasta saadaan

$$
\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z+a}\right\}=(-a)^{n-1}
$$

Joten

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{3}{z+1/2}\right\} &= 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}, \\
\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{-2}{z+1/3}\right\} &= -2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=6\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}
\end{aligned}
$$

Tällöin saadaan siis ratkaisuksi

$$
y(n)=6\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}-6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}
$$

Ratkaistaan tehtävä myös yritteellä $y(n)=\lambda^n$, joka sijoitetaan ratkaistavaan yhtälöön

$$
\lambda^{n+2}+\frac{5}{6}\lambda^{n+1}+\frac{1}{6}\lambda^{n}=0,
$$

josta saadaan kertomalla puolittain $\frac{6}{\lambda^n}$:llä

$$
6\lambda^2+5\lambda+1=0.
$$

Tällä on ratkaisut

$$
\lambda=-\frac{1}{3} \text{ tai } \lambda=-\frac{1}{2}.
$$

Siis vapaaksi vasteeksi saadaan

$$
y(t)=c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}+c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n},
$$

missä parametrit c_1 ja c_2 määräytyvät alkuehdoista, jolloin $c_1 = 6$ ja $c_2 = -6$.

Stabiilisuustarkastelua varten voidaan kirjoittaa tilaesitys valitsemalla $x_1(n) = y(n)$ ja $x_2(n) = y(n+1)$. Tällöin differenssiyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= x_2(n) \\ x_2(n+1) &= -\frac{5}{6}y(n+1) - \frac{1}{6}y(n) + u(n) = -\frac{5}{6}x_2(n) - \frac{1}{6}x_1(n) + u(n) \end{aligned}$$

Josta saadaan

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/6 & -5/6 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} u(n) \qquad (1)$$

$$y(n) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=C} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{=D} u(n) \qquad (2)$$

Matriisin A ominaisarvoiksi saadaan $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = -1/3$. Koska molemmat ominaisarvot ovat yksikköympyrän sisällä, on systeemi asymptoottisesti stabiili.

Sama tarkastelu voitaisiin tehdä myös siirtofunktion napojen avulla. Nyt siirtofunktiona on

$$G(z) = \frac{6z}{6z^2 + 5z + 1}$$

$G(z)$ nimittäjän nollakohdiksi saadaan $z = -1/2$ ja $z = -1/3$, eli sama tulos kuin tilaesityksen matriisin A avulla saatiin.

2. a) Varastoa voidaan kuvata differenssiyhtälömallilla:

$$y(t+2) = y(t+1) + u(t).$$

Pulssinsiirtofunktio saadaan z-muuntamalla yhtälö. Differenssiyhtälömallimme z-tasossa on

$$z^2Y(z) = zY(z) + U(z),$$

eli

$$Y(z) = \frac{1}{z^2 - z}U(z).$$

Systeemin pulssinsiirtofunktio on

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 - z}.$$

b) Pulssinsiirtofunktio $G(z)$ on määritelty z-tasossa ja sitä vastaava eteenpäinsiirto-operaattoripolynomi on

$$G(q) = \frac{1}{q^2 - q},$$

joka on puolestaan määritelty aikatasossa ($qy(t) = y(t+1)$). Eteenpäinsiirto-operaattoripolynomi siis on tulkittava seuraavasti:

$$y(t) = \frac{1}{q^2 - q} u(t) \Leftrightarrow (q^2 - q) y(t) = u(t) \Leftrightarrow y(t+2) - y(t+1) = u(t).$$

Eteenpäinsiirto-operaattoria vastaten on olemassa myös taaksepäinsiirto-operaattori

$$G^*(q^{-1}) = \frac{q^{-2}}{1 - q^{-1}},$$

joka saadaan supistamalla $G(q)$:ta korkeimmalla q:n potenssilla.

$G^*(q^{-1})$ voidaan johtaa suoraan kirjoittamalla systeemiä kuvaava differenssiyhtälömalli muodossa

$$y(t) = y(t-1) + u(t-2),$$

josta z-muuntamalla

$$Y(z) = z^{-1} Y(z) + z^{-2} U(z),$$

ja siis

$$Y(z) = \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}} U(z).$$

c) Koska pulssinsiirtofunktion navat ovat 1-ympyrän sisäpuolella (asymptoottinen stabiilisuus) ja ympyrän kehällä (stabiilisuus), on varasto stabiili. Tulkinta on että tasapainosta poikkeaminen, esim. varastosta ottaminen (häiriö) ei räjäytä varastoa, mutta toisaalta varastoon ei itsekseen ilmestykään tavaraa.

Huomaa, että tarkasteltaessa taaksepäinsiirto-operaattoria halutaan, että navat ovat ykksikköympyrän kehällä (stabiilisuus) tai sen ulkopuolella (asymptoottinen stabiilisuus)!

3. a) Tilaesitys systeemille on

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underbrace{-a}_{\mathbf{A}=-a} x(t) + \underbrace{u(t)}_{\mathbf{B}=1}, \\ y(t) &= \underbrace{x(t)}_{\mathbf{C}=1,\,\mathbf{D}=0} \end{aligned}$$

b) Systeemin siirtofunktio saadaan joko Laplace-muuntamalla differentiaaliyhtälö, tai suoraan tilaesityksestä kaavalla

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Tuloksena on

$$G(s) = \frac{1}{s+a}$$

Siirtofunktion ainoa napa on $s_1 = -a$. Jatkuva-aikainen systeemi on asymptoottisesti stabiili mikäli kaikki navat ovat vasemmassa puolitasossa. Tehtävän oletusten perusteella $a > 0$, eli systeemi on asymptoottisesti stabiili kaikilla a:n arvoilla.

c) Diskretoidaan systeemi Eulerin menetelmällä aika-askeleella T kirjoittamalla systeemin differentiaaliyhtälö muotoon

$$\frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} = -ay(kT) + u(kT)\,,$$

jossa k on diskretointiaskeleen indeksi. Tästä saadaan systeemin differenssiyhtälöksi

$$y((k+1)T) = (1-aT)y(kT) + Tu(kT)\,.$$

z-muuntamalla differenssiyhtälö saadaan diskreettiaikaista systeemiä vastaava siirtofunktio

$$G(z) = \frac{T}{z-1+aT}$$

Siirtofunktion ainoa napa on $z_1 = 1 - aT$. Diskreettiaikainen systeemi on stabiili mikäli kaikki navat ovat yksikköympyrän sisällä, eli

$$|1-aT| < 1 \Leftrightarrow T < \frac{2}{a}$$

Diskretointi Eulerin menetelmällä voi siis tehdä asymptoottisesti stabiilista systeemistä epästabiilin, mikäli diskretoinnissa käytettävä aika-askel T on liian suuri. Sopiva T riippuu tarkasteltavassa systeemissä parametrista a, joka kuvaa nopeutta, jolla systeemi palaa tasapainotilaan. Tulos on intuitiivisesti järkevä: systeemi, jossa esiintyy nopeita muutoksia on diskretoitava käyttäen lyhyttä aika-askelta T.

d) Mikäli $u(t)$ oletetaan vakioksi aika-askelten välillä, on jatkuva-aikaista lineaarista tilayhtälöä vastaava diskreettiaikainen tilayhtälö (kts. esim. kurssikirjan Appendix A.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)T) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{G}\mathbf{u}(kT)\,, \\ \mathbf{y}(kT) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT)\,, \end{aligned}$$

jossa

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= e^{\mathbf{A}T}\,, \\ \mathbf{G} &= \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\,\mathbf{B}\,\mathrm{d}\tau\,. \end{aligned}$$

Tulokseksi saadaan

$$\begin{aligned} F &= e^{-aT}\,, \\ G &= \frac{1}{a}(1-e^{-aT}). \end{aligned}$$

Tällä tavoin diskretoitua systeemiä vastaava siirtofunktio on

$$G(z) = \frac{(1-e^{-aT})/a}{z-e^{-aT}}\,.$$

Siirtofunktion ainoa napa on $z_1 = e^{-aT}$ joka on yksikköympyrän sisällä aina, kun $a > 0\,, T > 0$. Huomataan, että nyt diskretoitu systeemi säilyttää jatkuva-aikaisen systeemin stabiilisuusominaisuuden. Hintana on yleisessä tapauksessa matriisien $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{G}$ laskeminen, joka voi olla raskasta.

e) Aseta parametrit paikalleen ajamalla tiedosto lh3t3_m.m ja käytä Simulink-mallia lh3t3.slx. Voit kokeilla Eulerin menetelmällä diskretoidun systeemin stabiilisuutta valitsemalla parametrin $T > 2/a$.

4. ARMA (AutoRegressive Moving Average)-prosessi voidaan kirjoittaa muotoon

$$
\begin{aligned}
y(k) + \underbrace{b_1 y(k-1) + b_2 y(k-2) + \ldots + b_r y(k-r)}_{AR-osa} = \\
\underbrace{a_1 u(k-1) + a_2 u(k-2) + \ldots + a_r u(k-r)}_{MA-osa}
\end{aligned}
$$

Voidaan osoittaa, että tällaiselle ns. yleistä muotoa olevalle differenssiyhtälölle on olemassa kaksi kanonista muotoa, ohjattava kanoninen muoto ja tarkkailtava kanoninen muoto (ohjattavuudesta ja tarkkailtavuudesta lisää luennolla 5). Ohjattava kanoninen muoto saadaan kirjoittamalla ARMA-prosessille seuraava tilaesitys:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_{r-1} & -b_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-1} & a_r \end{bmatrix} x(k)
\end{aligned}
$$

Tarkkailtava kanoninen muoto saadaan taas kirjoittamalla tilaesitys muotoon:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \begin{bmatrix} -b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{r-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ a_r \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k)
\end{aligned}
$$

Tehtävän oppina on siis se, että tilaesityksen voi kirjoittaa usealla eri tavalla. Tässä tehtävässä esitetyt tilaesitykset eivät suinkaan ole ainoita, jotka voitaisiin kirjoittaa ARMA-mallille!

5. Tehtävässä annettujen differenssiyhtälöiden lisäksi pätee

$$X(t) = X(t-1) + P(t) - V(t).$$

a) Kirjoittaaksemme tämän tilayhtälömuotoon otetaan käyttöön standardit merkinnät: $x_1(t) = X(t-1)$, $x_2(t) = P(t)$ ja $u(t) = V(t)$. Siten saamme yhtälöiksi

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(t) + x_2(t) - u(t) \\ x_2(t+1) &= P(t+1) = \alpha P(t) + (1-\alpha)O(t) \\ &= \alpha x_2(t) + (1-\alpha)(V_0 + X_0 - x_1(t)). \end{aligned}$$

Tämä on tilayhtälömuodossa

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(t) + x_2(t) - u(t) \\ x_2(t+1) &= (\alpha - 1)x_1(t) + \alpha x_2(t) + (1-\alpha)(V_0 + X_0) \\ y(t) &= x_1(t). \end{aligned}$$

b) Huomataan, että pienet heilahtelut kysynnässä vahvistuvat varastosaldossa x_1, joka vahvistuu edelleen tuotannossa x_2.

Jos kysyntään tulee askelmainen häiriö alkaa varasto värähdellä, koska tehdasta ohjataan olettaen, että keskimääräinen kulutus olisi V_0.