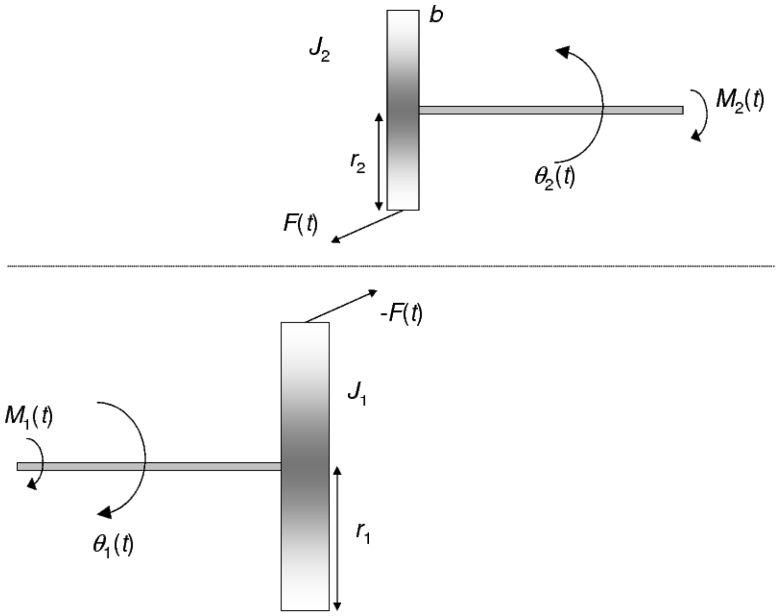
Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-E2129 Systeemien identifiointi

4. harjoituksen ratkaisut

1. Sovelletaan oppikirjan esittelemää kolmivaiheista lähestymistapaa.

   (i) Hajotetaan systeemi osasysteemeiksi. Tässä tapauksessa luonnollista on valita osasysteemeiksi pyörä 1 ja pyörä 2. Tällöin saadaan kuvan 1 mukaiset systeemit, jotka on kytketty toisiinsa pyörien kosketuspinnan kautta. Tässä voima $F(t)$ kytkee pyörät toisiinsa.



Kuva 1: Tehtävän 1 pyöräsysteemi

   (ii) Mallinnetaan osasysteemit.
   Merkitään $r = \frac{r_2}{r_1}$. Pyörien kulmanopeuksien välillä pätee staattinen riippuvuus

$$\dot{\theta}_1(t) = r\dot{\theta}_2(t),$$

   josta saadaan derivoimalla

$$\ddot{\theta}_1(t) = r\ddot{\theta}_2(t).$$

Newtonin momenttilaki antaa

$$
\begin{aligned}
J_1\ddot{\theta}_1(t) &= M_1(t) - r_1F(t) \\
J_2\ddot{\theta}_2(t) &= r_2F(t) - M_2(t) - b\dot{\theta}_2(t).
\end{aligned}
$$

Yhsdistetään nyt systeemit eliminoimalla $F(t)$. Kerrotaan ylempi yhtälö tekijällä $\frac{r_2}{r_1}$ ja lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin saadaan

$$
J_1\frac{r_2}{r_1}\ddot{\theta}_1(t) + J_2\ddot{\theta}_2(t) = \frac{r_2}{r_1}M_1(t) - M_2(t) - b\dot{\theta}_2(t).
$$

Tästä voidaan eliminoida $\ddot{\theta}_1(t)$ käyttämällä edellä laskettua staattista riippuvuutta, jolloin saadaan

$$
(J_1r^2 + J_2)\ddot{\theta}_2(t) = rM_1(t) - M_2(t) - b\dot{\theta}_2(t).
$$

Siten yhtälöpari on saatu redusoitua yhdeksi yhtälöksi, jossa voidaan määritellä systeemin kokonaishitausmomentti $J = (J_1r^2 + J_2)$.

(iii) Kirjoitetaan systeemille tilaesitys. Merkitään $u_1(t) = M_1(t)$, $u_2(t) = M_2(t)$, $x(t) = \dot{\theta}_2(t)$ ja $y(t) = \dot{\theta}_2(t)$. Siten saadaan esitys

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{1}{J}(-bx(t) + ru_1(t) - u_2(t)) \\
y(t) &= x(t).
\end{aligned}
$$

2. Kirchhoffin laista saadaan, että

$$
u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + k_1\dot{\theta}_m(t).
$$

Newtonin momenttilaista saadaan

$$
\begin{aligned}
J_m\ddot{\theta}_m(t) &= k_2i(t) + k_3(\theta(t) - \theta_m(t)) - b\dot{\theta}_m(t) \\
J\ddot{\theta}(t) &= k_3(\theta_m(t) - \theta(t)).
\end{aligned}
$$

a) Merkitään $x_1(t) = i(t)$, $x_2(t) = \theta_m(t)$, $x_3(t) = \dot{\theta}_m(t)$, $x_4(t) = \theta(t)$ ja $x_5(t) = \dot{\theta}(t)$. Näin saadaan systeemi

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{k_1}{L}x_3(t) + \frac{1}{L}u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\
\dot{x}_3(t) &= \frac{k_2}{J_m}x_1(t) - \frac{k_3}{J_m}x_2(t) - \frac{b}{J_m}x_3(t) + \frac{k_3}{J_m}x_4(t) \\
\dot{x}_4(t) &= x_5(t) \\
\dot{x}_5(t) &= \frac{k_3}{J}x_2(t) - \frac{k_3}{J}x_4(t) \\
y(t) &= x_4(t).
\end{aligned}
$$

b) Oletetaan siis, että akseli on jäykkä, eli $\theta(t) = \theta_m(t)$. Tällöin

$$\begin{aligned} u(t) &= Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + k_1\dot{\theta}_m(t) \\ J_a\ddot{\theta}_m(t) &= k_2 i(t) - b\dot{\theta}_m(t), \end{aligned}$$

missä $J_a = J + J_m$ on moottorin ja vauhtipyörän yhteinen hitausmomentti. Tämän tilaesitys on nyt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{k_1}{L}x_3(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{k_2}{J_a}x_1(t) - \frac{b}{J_a}x_3(t) \\ y(t) &= x_2(t). \end{aligned}$$

c) Oletetaan vielä b)-kohdan oletuksen lisäksi, että $L = 0$. Näin saadaan systeemi

$$\begin{aligned} u(t) &= Ri(t) + k_1\dot{\theta}_m(t) \\ J_a\ddot{\theta}_m(t) &= k_2 i(t) - b\dot{\theta}_m(t). \end{aligned}$$

Tästä systeemistä saadaan eliminoitua virta $i(t)$, jolloin

$$J_a\ddot{\theta}_m(t) = k_2\left(\frac{1}{R}u(t) - \frac{k_1}{R}\dot{\theta}_m(t)\right) - b\dot{\theta}_m(t),$$

josta a)-kohdan merkinnöillä saadaan esitettyä tilayhtälömuodossa

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \left(-\frac{k_1 k_2}{RJ_a} - \frac{b}{J_a}\right)x_3(t) + \frac{k_2}{RJ_a}u(t) \\ y(t) &= x_2(t). \end{aligned}$$

Simuloidaan systeemiä olettaen, että alussa systeemi on levossa ja, että virta piirissä on nolla, ks. lh4t2.slx ja lh4t2_m.m. Havaitaan, että elastisella akselilla vauhtipyörä aluksi pyörii hitaammin kuin jäykällä. Mutta, alun jälkeen vauhtipyörä alkaa pyöriä kuten jäykälläkin akselilla.

Valinnalla $L = 0$ huomataan, että alussa vauhtipyörä pyörii nopeammin, koska käämi ei ala varastoida energiaa itseensä vaan se kuluu suoraan pyörimiseen.

Kaikki mallit tuottavat saman tasapainotilan systeemille.

3. Differentiaaliyhtälösysteemin ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$x_1(t) = e^{-0.001t}x_1(0) + 0.001\int_0^t e^{-0.001(t-\tau)}u(\tau)d\tau$$

ja

$$x_2(t) = e^{-1000t}x_2(0) + 1000\int_0^t e^{-1000(t-\tau)}u(\tau)d\tau.$$

Ideana on approksimoida s.e. toinen tiloista voidaan laskea suoraan toisen tilan tai sisäänmenon avulla.

a) Termin $e^{-1000t}x_2(0)$ arvo lähestyy nopeasti nollaa kun t kasvaa. Simulointiajan ollessa pitkä, voidaan siten approksimoida

$$e^{-1000t}x_2(0) \approx 0.$$

Kun $u(t)$ lisäksi muuttuu hitaasti, niin voidaan approksimoida $u(\tau) \approx u(t)$ kun $\tau \approx t$ ja $e^{-1000(t-\tau)} \approx 0$ kun $\tau \ll t$, jolloin

$$x_2(t) \approx 1000u(t)\int_0^t e^{-1000(t-\tau)}d\tau = (1 - e^{-1000t})u(t) \approx u(t),$$

joten systeemin approksimaatioksi saadaan

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -0.001x_1(t) + 0.001u(t) \\ y(t) &= x_1(t) + u(t). \end{aligned}$$

b) Nyt ohjaus on vakio, eli $u(t) = K$, jolloin yhtälön (5) integraalitermistä saadaan

$$0.001K\int_0^t e^{-0.001(t-\tau)}d\tau = K(1 - e^{-0.001t}),$$

joka lyhyillä simulointiajoilla pysyy pienenä. Siten voidaan approksimoida

$$x_1(t) \approx e^{-0.001t}x_1(0) \approx x_1(0),$$

koska t on lähellä nollaa. Approksimoivaksi systeemiksi saadaan

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= -1000x_2(t) + 1000u(t) \\ y(t) &= x_1(0) + x_2(t). \end{aligned}$$

c) Alkuperäisessä systeemissä ongelmana on se, että aikavakiot muuttujille x_1 ja x_2 ovat eri suuruusluokassa. Systeemissä on siis sekä nopeasti, että hitaasti muuttuvia komponentteja, jotka tekevät systeemin ratkaisemisesta vaikeaa.

Erityisesti pitkällä aikavälillä alkuperäisen systeemin ratkaiseminen on hyvin hidasta, ja approksimoivan systeemin ratkaisu antaa tuloksen nopeammin ja sen tarkkuus on "kohtuullinen". Katso tiedostot lh4t3_m.m, lh4t3a.slx, lh4t3b.slx ja lh4t3c.slx.

4. a) Diskretoidaan siis etäisyys x tasavälisesti s.e., $x(k) = kh$, missä h on diskretointiväli ja $k = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$. Olkoon $u_k(t)$ jännite ja $i_k(t)$ virta näissä pisteissä hetkellä t. Yksinkertaisella differenssiaproksimaatiolla saadaan

$$\frac{\partial u(t, x_k)}{\partial x} \approx \frac{u_{k+1}(t) - u_k(t)}{h},$$

pisteissä $x = kh$. Tätä kutsutaan eteenpäin differenssiksi. Toisaalta voidaan myös käyttää taaksepäin differenssiä, jolloin

$$\frac{\partial u(t, x_k)}{\partial x} \approx \frac{u_k(t) - u_{k-1}(t)}{h}.$$

Osittaisderivaattoja $\frac{\partial u}{\partial x}$ approksimoidaan tässä yhteydessä eteenpäin differensseillä, koska $i_N(t) = 0$ (johdin on avoin, eikä se vuoda). Näin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{di_0(t)}{dt} &\approx -\frac{1}{Lh}(u_1(t) - u_0(t)) && (1) \\ \frac{di_k(t)}{dt} &\approx -\frac{1}{Lh}(u_{k+1}(t) - u_k(t)),\ 0 < k < N. && (2) \end{aligned}$$

Koska $u_0(t)$ tunnetaan on tässä järkevää approksimoida osittaisderivaattoja $\frac{\partial i}{\partial x}$ taaksepäin differensseillä. Näin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{du_k(t)}{dt} &\approx \frac{1}{Ch}(i_k(t) - i_{k-1}(t)),\ 0 < k < N && (3) \\ \frac{du_N(t)}{dt} &\approx \frac{1}{Ch}(i_N(t) - i_{N-1}(t)) = -\frac{1}{Ch}i_{N-1}(t). && (4) \end{aligned}$$

Näin olemme saaneet systeemin (1)-(4), jossa tiloina ovat $i_k(t)$:t ja $u_k(t)$:t. Ohjaus on $u_0(t)$.

b) Jokainen yhtälöistä (1)-(2) kuvaa ideaalikäämiä (induktanssina Lh) ja jokainen yhtälöistä (3)-(4) kuvaa kondensaattoria (kapasitanssina Ch). Yhdistettynä yhtälöt voidaan tulkita tehtäväpaperin mukaisena verkkona, jossa pystysuuntaiset komponentit vastaavat kondensaattoreita ja vaakasuuntaiset käämejä.

5. a) Matriisimuoto $E\dot{x}(t) + \bar{A}x(t) = \bar{B}u(t)$ on siis tässä tapauksessa seuraava:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \dot{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 2 & \beta \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Jotta systeemi voitaisiin kuvata tutussa tilayhtälömuodossa pitäisi matriisin E olla ei-singulaarinen. Nyt ei kuitenkaan näin ole. Tämä nähdään esimerkiksi determinantista $\det(E) = 0$.

b) Ongelmana on se, että systeemimme ei oikeastaan olekaan kolmatta kertalukua, vaan toista. Tämä nähdään suorittamalla matriisioperaatioita s.e. matriisista E tulee yläkolmiomatriisi. Systeemi saadaan muotoon

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 2 & \beta \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\beta \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t),$$

eli viimeinen yhtälö antaakin staattisen riippuvuuden

$$-x_1(t) + (1-\beta)x_3(t) = -u(t),$$

josta saadaan

$$x_1(t) = (1-\beta)x_3(t) + u(t).$$

Tätä yhtälöä derivoimalla saadaan, että

$$\dot{x}_1(t) = (1-\beta)\dot{x}_3(t) + \dot{u}(t).$$

Siten saamme eliminoitua differentiaaliyhtälösysteemistämme x_1:n ja $\dot{x}_1$:n, joten saamme

$$\begin{bmatrix} 0 & 2-\beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u}(t),$$

josta nyt voidaankin ratkaista $\dot{x}_2(t)$ ja $\dot{x}_3(t)$ kääntämällä derivaattavektorin edessä oleva matriisi. Tämä onnistuu, jos $\beta \neq 2$, jolloin

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\beta-6}{\beta-2} & \frac{-1}{\beta-2} \\ \frac{2}{\beta-2} & \frac{1}{\beta-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{\beta-2} \\ \frac{1}{\beta-2} \end{bmatrix} \dot{u}(t).$$

Nyt ollaankin jo melkein maalissa. Enää on valittava vektori z sopivasti. Valitaan

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x_2(t) - \frac{-1}{\beta-2} u(t) \\ z_2(t) &= x_3(t) - \frac{1}{\beta-2} u(t), \end{aligned}$$

jotta saamme eliminoitua $\dot{u}(t)$:n.

Nyt saamme

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \frac{2\beta-6}{\beta-2} x_2(t) + \frac{-1}{\beta-2} x_3(t) = \frac{2\beta-6}{\beta-2} z_1(t) + \frac{-1}{\beta-2} z_2(t) - \frac{2\beta-5}{(\beta-2)^2} u(t) \\ \dot{z}_2(t) &= \frac{2}{\beta-2} x_2(t) + \frac{1}{\beta-2} x_3(t) = \frac{2}{\beta-2} z_1(t) + \frac{1}{\beta-2} z_2(t) - \frac{1}{(\beta-2)^2} u(t). \end{aligned}$$

Näin voidaan kirjoittaa systeemi tilayhtälömuodossa

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \frac{1}{\beta-2} \begin{bmatrix} 2\beta-6 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} z(t) - \frac{1}{(\beta-2)^2} \begin{bmatrix} 2\beta-5 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ x(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1-\beta \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z(t) + \frac{1}{\beta-2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \end{aligned}$$

joten $B_1 = 0$.

c) Jos siis $\beta = 2$, eivät b-kohdan laskut mene läpi. Tällöin

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u}(t),$$

eli meillä on tilamuuttujien välillä toinen staattinen riippuvuus

$$2x_2(t) + x_3(t) = -\dot{u}(t),$$

josta saadaan

$$x_3(t) = -2x_2(t) - \dot{u}(t),$$

ja derivoimalla

$$\dot{x}_3(t) = -2\dot{x}_2(t) - \ddot{u}(t)$$

joten tilayhtälö saa muodon

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) - \ddot{u}(t).$$

Valitaan tälläkin kertaa $z(t)$ s.e. $\dot{u}$ ja $\ddot{u}$ häviävät, eli

$$z(t) = x_2(t) + \alpha_1 u(t) + \alpha_2 \dot{u}(t).$$

Tästä derivoimalla saamme

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= \dot{x}_2(t) + \alpha_1 \dot{u}(t) + \alpha_2 \ddot{u}(t) \\
&= -2x_2(t) - \ddot{u}(t) + \alpha_1 \dot{u}(t) + \alpha_2 \ddot{u}(t) \\
&= -2z(t) + 2\alpha_1 u(t) + (2\alpha_2 + \alpha_1)\dot{u}(t) + (-1 + \alpha_2)\ddot{u}(t),
\end{aligned}$$

josta saadaan valitsemalla $\alpha_2 = 1$ ja $\alpha_1 = -2$

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= -2z(t) - 4u(t) \\
x(t) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{u}(t),
\end{aligned}$$

joten $B_1 = B_2 = 0$.