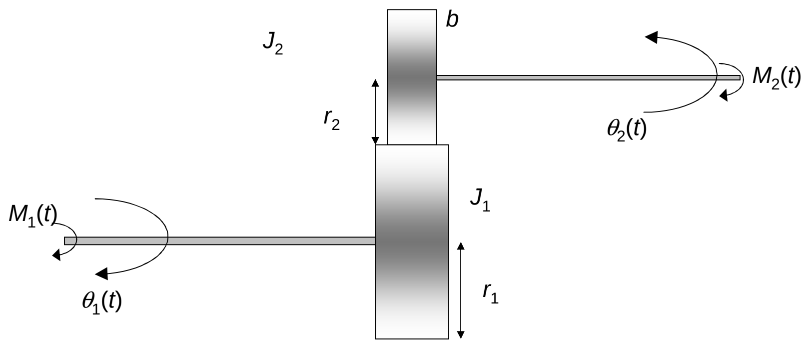
Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-E2129 Systeemien identifiointi

4. laskuharjoitus

1. Tarkastellaan kuvan 1 mukaista mekaanista pyöräsysteemiä. Viitatkoon alempaan pyörään indeksi 1 ja ylempään 2. Pyörä 2 jarruttaa systeemiä ja 1 kiihdyttää. Oleta, että pyörät eivät pääse liukumaan.

   Olkoon $\dot{\theta}_i(t)$, r_i, J_i ja $M_i(t)$ pyörien pyörimisnopeus, säde, hitausmomentti ja pyörimismomentti. Pyörät pyörivät laakereiden varassa ja oletetaan, että alemman pyörimiskitka voidaan sisällyttää ylemmän kitkakertoimeen b. Kirjoita systeemille tilaesitys olettaen, että sisäänmenoina ovat $M_1(t)$ ja $M_2(t)$ sekä ulostulona $\dot{\theta}_2(t)$.



Kuva 1: Tehtävän 1 pyöräsysteemi.

2. Tarkastellaan kuvan 2 systeemiä. Siinä tasavirtamoottori pyörittää elastisella akselilla vauhtipyörää.

   Moottorissa on RL-piiri, jossa on vastus R ja induktanssi L, sekä tasavirtalähde, jonka yli on kytketty jännite $u(t)$. Moottori voidaan kuvata piirissä epälineaarisena komponenttina, jonka napajännite $v(t)$ on suoraan verrannollinen moottorin pyörimisnopeuteen $\dot{\theta}_m(t)$:

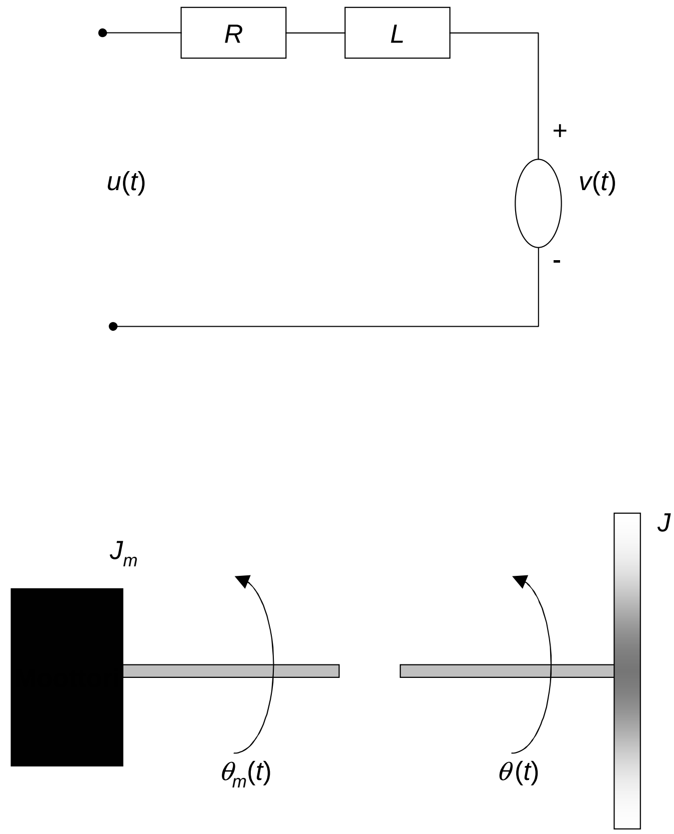
$$v(t) = k_1\dot{\theta}_m(t)$$

   Mekaaninen osa kuvataan siten, että moottori pyörittää vauhtipyörää, jonka hitausmomentti on J_m, joka on kytketty elastisen akselin yli toiseen vauhtipyörään, jonka pyörimismomentti on J ja jonka pyörimisnopeutta merkitään $\dot{\theta}(t)$:llä. Elastinen akseli aiheuttaa systeemiin ylimääräisen pyörimismomentin, joka on verrannollinen erotukseen $\theta_m(t) - \theta(t)$. Moottorin pyörimiskitkasta aiheutuu $\dot{\theta}(t)$:aan verrannollinen momentti.

a) Kirjoita systeemiä kuvaava differentiaaliyhtälön tilaesitys, kun sisäänmeno on $u(t)$ ja $\theta(t)$ ulostulo.

b) Yksinkertaista mallia, ja oleta akseli jäykäksi.

c) Yksinkertaista mallia edelleen ja oleta moottorin induktanssi pieneksi. Simuloi näitä kolmea mallia erilaisilla ohjauksilla $u(t)$, ja vertaile tuloksia.



Kuva 2: Tehtävän 2 pyöräsysteemi

3. Tarkastellaan mallia

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -0.001x_1(t) + 0.001u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -1000x_2(t) + 1000u(t)\\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t)\end{aligned}$$

a) Halutaan simuloida ulostuloa $y(t)$ 5000 sekunnin ajan, kun $u(t)$ muuttuu hitaasti. Approksimoi systeemiä sopivalla ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöllä.

b) Kuten a)-kohta, mutta nyt halutaan simuloida $y(t)$:tä kymmenen millisekunnin ajan sen jälkeen kun sisäänmenoon $u(t)$ on kohdistunut askelmainen häiriö. Oleta, että $x_1(0) = 5$ ja $x_2(0) = 0$.

c) Miksi ei ole järkevää simuloida alkuperäistä yhtälöä? Kokeile simuloida sekä yksinkertaistettuja yhtälöitä että myös alkuperäistä.

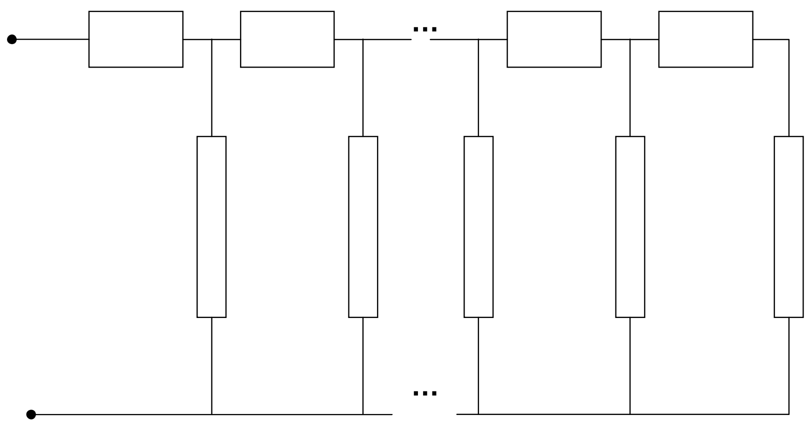
4. Tarkastellaan signaalin etenemistä pitkin johdinta, joka on avoin toisesta päästä. Pisteessä, joka on etäisyydellä x alkupisteestä, kulkee virta $i(t,x)$ hetkellä t ja jännite $u(t,x)$. Virran ja jännitteen välillä pätee seuraavat osittaisdifferentiaaliyhtälöt:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} &= L\frac{\partial i(t,x)}{\partial t} \\
\frac{\partial i(t,x)}{\partial x} &= C\frac{\partial u(t,x)}{\partial t},
\end{aligned}
$$

missä L ja C ovat vakioita, jotka kuvaavat induktanssia ja kapasitanssia pituusyksikköä kohden.

a) Tarkastele virran ja jännitteen arvoja vain diskreeteissä pisteissä $0, h, 2h, \ldots, Nh$. Approksimoi osittaisderivaattoja sopivilla differensseillä ja muodosta tilayhtälöt näin saatavalle systeemille. Oleta, että virta $u(t,0) = u_0(t)$ tunnetaan.

b) Näytä, että esitetty diskretointi vastaa fysikaalisesti kuvan 3 mukaista virtapiiriä. Mitä komponentteja laatikot edustavat?



Kuva 3: Tehtävän 4b virtapiiri

5. Tarkastellaan nyt sellaista mallia, jota ei voida kuvata tilayhtälömuodossa suoraan. Tällainen tilanne muodostuu, jos esimerkiksi systeemin tilat on valittu sopivasti, vaikka itse kuvattava systeemi olisikin yksinkertainen. Tyyppiesimerkkinä tällaisesta tapauksesta esitään yleensä kaksi rinnan kytkettyä kondensaattoria, joiden tiloiksi valitaan niiden napajännitteet.

Tarkastellaan seuraavaa differentiaaliyhtälömallia:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) + \dot{x}_3(t) + x_1(t) + 2x_2(t) + \beta x_3(t) &= u(t) \\
\dot{x}_2(t) + \dot{x}_3(t) - 2x_2(t) &= 0 \\
\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) + 2\dot{x}_3 + x_3(t) &= 0,
\end{aligned}
$$

joka on siis muotoa

$$E\dot{x}(t) + \bar{A}x(t) = \bar{B}u(t).$$

a) Näytä, että systeemiä ei voida kuvata muodossa

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

missä $A = -E^{-1}\bar{A}$ ja $B = E^{-1}\bar{B}$.

b) Näytä, että systeemi voidaan kuvata muodossa

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az(t) + B_0 u(t) + B_1 \dot{u}(t) \\ x(t) &= Cz(t) + Du(t), \end{aligned}$$

missä $z(t)$ on vektori, joka sisältää vähemmän komponentteja kuin $x(t)$. Millä β:n arvoilla tämä on mahdollista? Entä miten mallin sisältämät matriisit ja $z(t)$ on muodostettava? Voiko olla $B_1 = 0$?

c) Näytä, että jos β on sellainen, että b)-kohdan esitysmuoto ei ole mahdollinen, niin malli voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az(t) + B_0 u(t) + B_1 \dot{u}(t) + B_2 \ddot{u}(t) \\ x(t) &= Cz(t) + D_0 u(t) + D_1 \dot{u}(t), \end{aligned}$$

Voiko tässä tapauksessa olla $B_1 = B_2 = 0$?