Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-E2129 Systeemien identifiointi

5. harjoituksen ratkaisut

1. Esitetään ensin systeemi tilayhtälömuodossa. Tiloiksi valitaan

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i_a \end{bmatrix}$$

ja ulostuloksi $y = \theta$ sekä ohjaukseksi $u = e_a$. Näin saadaan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{J} & \frac{K_T}{J} \\ 0 & -\frac{K_b}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u.$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Systeemi on siis lineaarinen aikainvariantti systeemi, jolloin se voidaan kirjoittaa yleisesti matriisimuodossa

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

missä tilat $x(t) \in \mathbb{R}^n$, ohjaukset $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sekä $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Tällainen systeemi on saavutettava joss ohjattavuusmatriisin ($n \times mn$-matriisi)

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

rangi (lineaarisesti riippumattomien pysty/vaakavektoreiden määrä) on n. Intuitiivisesti saavutettavuudessa on kysymys siitä, että voidaanko systeemi ohjata äärellisessä ajassa mielivaltaisesta alkutilasta mielivaltaiseen lopputilaan. Lineaarisille järjestelmille tämä voidaan ekvivalentisti mieltää s.e. voidaanko systeemi ohjata äärellisessä ajassa origoon.

Tässä tehtävässä saadaan ohjattavuusmatriisiksi

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{K_T}{JL} \\ 0 & \frac{K_T}{JL} & -\frac{K_T(BL+JR)}{J^2L^2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} & \frac{JR^2-K_TK_bL}{JL^3} \end{bmatrix}.$$

Tämän rangi on $n = 3$, jos $\frac{K_T}{JL} \neq 0$. Tämä ehto on fysikaalisesti täytetty, joten systeemi on saavutettava.

Kun systeemin ulostulona on $y(t) = Cx(t)$ niin tarkkailtavuusmatriisi yleisessä muodossa on

$$Q_o = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}.$$

jonka rangin tulee olla n, jotta ulostulot olisivat tarkkailtavia ts. jotta mittaustulosten $y(t)$ ja ohjausten $u(t)$ avulla voidaan rekonstruoida systeemin alkutila $x(0)$.

Tässä tehtävässä

$$Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{B}{J} \\ 0 & 0 & \frac{K_T}{J} \end{bmatrix},$$

jonka rangi on $n = 3$, jos $\frac{K_T}{J} \neq 0$, mikä on fysikaalisesti OK ja järjestelmä on tarkkailtava.

Valitaankin nyt ulostuloksi asennon sijaan nopeus, jolloin $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ja

$$Q_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{B}{J} & \frac{LB^2 - JK_T K_b}{J^2 L} \\ 0 & \frac{K_T}{J} & -\frac{K_T(BL+JR)}{J^2 L} \end{bmatrix},$$

jonka rangi on 2, eikä systeemi ole enää täydellisesti tarkkailtava. Tämä on intuitiivisestikin selvää, koska pelkän pyörimisnopeuden perusteella ei voida jäljittää pyörähdyskulmaa absoluuttisesti - vain pyörähdyskulman muutos voidaan jäljittää.

2. Tässä tehtävässä $\dot{x}_2 = -x_2$, joten se elää omaa elämäänsä riippumatta ohjauksesta u ja toisesta tilasta x_1, joten systeemi ei ole saavutettava. Tässä tapauksessa ohjattavuusmatriisi on

$$Q_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

jonka rangi on 1.

Tehtävä on tyypillinen esimerkki tapauksesta, jossa ohjauksilla ei voida vaikuttaa kaikkiin tiloihin, eikä systeemi siten ole täydellisesti ohjattava.

Kuitenkin on olemassa tiloja, joista systeemi voidaan ohjata origoon äärellisessä ajassa. Nämä tilat saadaan konstruoitua ohjattavuusmatriisin sarakkeiden lineaarikombinaationa. Siten muotoa

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

olevat tilat (eli kaikki tilat, joissa $x_2 = 0$) ovat ohjattavia.

3. Tässä tehtävässä nyt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ja $n = 2$ sekä $m = 1$. Tällöin ohjattavuusmatriisi on

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

jonka rangi on $n = 2$, joten systeemi on saavutettava.

Eräs esimerkkitulkinta systeemille on yksiulotteinen autosysteemi, jossa u on kaasun/jarrun asento, joka antaa autolle kiihtyvyyden $\dot{x}_2$. x_1 on auton paikka yksiulotteisella ajoradalla. Kokeile simuloida autosysteemiä Matlabilla, ks. las05t3.m. Yritä valita ohjaus siten, että saat auton haluamaasi tilaan (analyyttisesti tämä tehtäisiin dynaamisen optimoinnin menetelmin)!

Tehdään nyt annettu lineaarimuunnos tilamuuttujille:

$$z = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix} x, \ \alpha \neq \beta,$$

josta saadaan

$$x = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix}^{-1} z = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{bmatrix} \beta & -\alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix} z.$$

Siten uusilla tilamuuttujilla saadaan

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \dot{x}(t) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \text{ (alkuperäisestä systeemistä)} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} u(t) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{bmatrix} \beta & -\alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} u(t) \text{ (lausumalla } x \ z\text{:n avulla)} \\
&= \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} u(t) \\
&= A' z(t) + B' u(t).
\end{aligned}$$

Tälle systeemille saadaan ohjattavuusmatriisiksi

$$Q_c' = \begin{bmatrix} B' & A'B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{bmatrix},$$

jolla on edelleen $n = 2$ lineaarisesti riippumatonta pysty (vaaka) -vektoria, kunhan $\alpha \neq \beta$. Siten systeemi on edelleen saavutettava.

4. Jatkuva-aikaisen systeemin tilayhtälön matriisit ovat

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Systeemin ohjattavuusmatriisi on

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega^2 \\ \omega & 0 \end{bmatrix}.$$

Sen determinantti on $\det(Q_c) = -\omega^3$, joten systeemi on saavutettava. Systeemin tarkkailtavuusmatriisi on

$$Q_o = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}.$$

Sen determinantti on $\det(Q_o) = \omega$, joten systeemi on myös tarkkailtava.

Diskreettiaikaisen systeemin tilayhtälön matriisit ovat

$$F = \begin{bmatrix} \cos(\omega h) & \sin(\omega h) \\ -\sin(\omega h) & \cos(\omega h) \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 - \cos(\omega h) \\ \sin(\omega h) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aikainvariantille diskreetille systeemille ohjattavuusmatriisi näyttää samalta kuin jatkuva-aikaisellekin. Siten tässä tehtävässä

$$\tilde{Q}_c = \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \cos(\omega h) & -\cos(2\omega h) + \cos(\omega h) \\ \sin(\omega h) & \sin(2\omega h) - \sin(\omega h) \end{bmatrix}.$$

Ohjattavuusmatriisin determinantti on $\det(\tilde{Q}_c) = \sin(2\omega h) - 2\sin(\omega h)$, ja systeemi on saavutettava jos tämä ei ole nolla. Mikäli $\omega h = n\pi$ niin determinantiksi tulee nolla.

Diskreettiaikaisen mallin tarkkailtavuusmatriisi on puolestaan

$$\tilde{Q}_o = \begin{bmatrix} C^T & F^T C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega h) \\ 0 & \sin(\omega h) \end{bmatrix},$$

ja sen determinantti $\det(\tilde{Q}_o) = \sin(\omega h)$. Tämä on myös nolla kun $\omega h = n\pi$, jolloin systeemi ei ole tarkkailtava.

Oskillaattori on siis saavutettava ja tarkkailtava. Näytteenotto voi kuitenkin hävittää sekä saavutettavuuden että tarkkailtavuuden silloin kun systeemi värähtelee näytteenottotaajuudella. Tällaisia värähtelyjä kutsutaan piilovärähtelyiksi.

5. a) Nyt siis haetaan parametria v (nopeus) mallille

$$\begin{aligned} y_0 &= t_0 v + e_0 \\ &\vdots \\ y_7 &= t_7 v + e_7, \end{aligned}$$

missä y_i on kappaleen paikka mittauksessa i ajanhetkellä t_i ja e_i on mittaukseen sisältyvä virhetermi. Malli voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$y = tv + e,$$

eli

$$y = Ax + e,$$

missä

$$y = \begin{bmatrix} 5.71 & 9 & 15 & 19 & 20 & 45 & 55 & 78 \end{bmatrix}^T$$

ja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 12 & 18 \end{bmatrix}^T.$$

Tehtävänä on nyt ratkaista paramteri x s.e virheiden neliösumma $e^T e$ minimoituu, jolloin saadaan optimointitehtävä

$$\min_x (y - Ax)^T (y - Ax),$$

Tällaiselle tehtävälle voidaan ratkaisu esittää suljetussa muodossa

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y,$$

mikäli tarvittava käänteismatriisi on olemassa. Numeerisen arvon tälle voit laskea Matlab-funktiolla las05t5.m.

b) Nyt estimoidaan lisäksi alkutilaa y_0. Tällöin tarkasteltava malli on

$$\begin{aligned} y_0 &= t_0 v + y_0 + e_0 \\ &\vdots \\ y_7 &= t_7 v + y_0 + e_7, \end{aligned}$$

joka on matriisimuodossa

$$y = tv + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} y_0 + e.$$

Merkitään

$$x = \begin{bmatrix} v & y_0 \end{bmatrix}^T$$

jolloin

$$y = \begin{bmatrix} t_0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_7 & 1 \end{bmatrix} x + e,$$

eli

$$y = Ax + e,$$

joten parametrin x PNS-estimaatti $\hat{x}$ saadaan kuten a)-kohdassa. Numeeriset arvot voit laskea tällekin Matlabilla.