Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-E2129 Systeemien identifiointi

7. harjoituksen ratkaisut

1. Oletetaan siis, että systeemiä kuvaa siirtofunktio

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts}e^{-s\tau}.$$

Siirtofunktion eksponenttitermi edustaa τ:n mittaista viivettä. Tämä nähdään tutkimalla viiveen Laplace-muunnosta

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{u(t-\tau)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}u(t-\tau)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-s\tau}e^{-s(t-\tau)}u(t-\tau)dt \\
&= e^{-s\tau}\int_{-\tau}^\infty e^{-st}u(t)dt \\
&= e^{-s\tau}U(s), \text{ jos } u(t) = 0, \text{ kun } t < 0.
\end{aligned}$$

Nyt sisäänmeno $u(t)$ on yksikköaskelfunktio

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t < 0 \\ 1, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tämän Laplacemuunnos on

$$U(s) = \frac{1}{s},$$

joten

$$Y(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(1+Ts)s}.$$

Tästä saadaan Laplace-käänteismuunnoksella askelvaste. Muunnostaulukoista löydetään esimerkiksi aputulos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+a)}\right\} = \frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right).$$

Kirjoitetaan $Y(s)$ muodossa

$$Y(s) = \frac{\frac{K}{T}e^{-\tau s}}{s\left(s+\frac{1}{T}\right)},$$

josta käänteismuuntamalla saadaan askelvasteeksi aikatasossa

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{K}{T}\frac{1}{\frac{1}{T}}\left(1 - e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}\right) \\ &= K\left(1 - e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)}\right), \text{kun } t \geq \tau, \end{aligned}$$

koska eksponenttitermi vastaa viivästettä. Koska systeemi on alussa tasapainossa, pätee $y(t) = 0$ kun $t < \tau$. Tästä voidaan tunnistaa parametrin τ arvo. Lisäksi nähdään, että

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = K,$$

jolloin K saadaan estimoitua askelvasteesta katsomalla mihin ulostulo $y(t)$ stabiloituu. T saadaan estimoitua esimerkiksi tarkastelemalla derivaattaa

$$\dot{y}(t) = \frac{K}{T}e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)},$$

josta nähdään, että erityisesti

$$\dot{y}(\tau) = \frac{K}{T}.$$

Osamäärä $\frac{K}{T}$ saadaan estimoitua piirtämällä askelvasteelle tangetti hetkellä $t = \tau$. Tällöin saadaan estimoitua myös T, kunhan K estimoidaan ensin.

Ylläoleva saattaa käytännössä olla melko haasteellista. Järkevämpi vaihtoehto on tällöin sovittaa $y(t)$ vasteeseen etsimällä sopivat parametrit τ, K ja T.

2. Koska tarkasteltava järjestelmän kertaluku on kaksi, niin sen pulssinsiirtofunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$H\left(q^{-1}\right) = \frac{a_0 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2}}{1 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2}}. \tag{1}$$

Toisaalta siirtofunktio voidaan esittää myös muodossa

$$H\left(q^{-1}\right) = w_0 + w_1q^{-1} + w_2q^{-2} + \dots, \tag{2}$$

missä painokerroin $w_k = w(kT)$ voidaan tulkita systeemin impulssivasteena hetkellä kT, koska

$$\begin{aligned} y(t) &= H(q^{-1})u(t) \\ &= w_0u(t) + w_1u(t-1) + \cdots + w_tu(0) + w_{t+1}u(-1) + w_{t+2}u(-2) + \dots \\ &= w_tu(0), \end{aligned}$$

jos $u(t)$ tuottaa impulssin hetkellä $t = 0$. Tunnemme siis w_k:t mitatun datan perusteella. Nyt tavoitteena on siis estimoida parametrit a_k ja b_k. Saamme yhtälöstä (1)

$$(1 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2})H(q^{-1}) = a_0 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2}.$$

Käyttämällä siirtofunktion esitysmuotoa (2), saadaan puolestaan

$$
\begin{aligned}
&(1+b_1q^{-1}+b_2q^{-2})H(q^{-1})\\
=&(w_0+w_1q^{-1}+w_2q^{-2}+\dots)(1+b_1q^{-1}+b_2q^{-2}),\\
=&w_0+(w_1+b_1w_0)q^{-1}+(w_2+b_1w_1+b_2w_0)q^{-2}+(w_3+b_1w_2+b_2w_1)q^{-3}+\dots\\
=&w_0+(w_1+b_1w_0)q^{-1}+\sum_{k=2}^{\infty}(w_k+b_1w_{k-1}+b_2w_{k-2})q^{-k}.
\end{aligned}
$$

Saadaan siis yhtälö

$$
w_0+(w_1+b_1w_0)q^{-1}+\sum_{i=2}^{\infty}(w_k+b_1w_{k-1}+b_2w_{k-2})q^{-k}=a_0+a_1q^{-1}+a_2q^{-2},
$$

ja siitä puolestaan yhtälöryhmä

$$
\begin{aligned}
w_0&=a_0\\
w_1+b_1w_0&=a_1\\
w_2+b_1w_1+b_2w_0&=a_2\\
w_3+b_1w_2+b_2w_1&=0\\
w_4+b_1w_3+b_2w_2&=0\\
&\vdots\\
w_k+b_1w_{k-1}+b_2w_{k-2}&=0\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Jos oletetaan, että mittauksissa ei ole kohinaa, niin a_0, a_1, a_2, b_1 ja b_2 (viisi tuntematonta) voidaan ratkaista viidestä ensimmäisestä yhtälöstä. Muuttujat b_i voidaan ratkaista neljännestä ja viidennestä yhtälöstä ja näiden avulla muuttujat a_i kolmesta ensimmäisestä. Ratkaisuksi saadaan

$$
\begin{aligned}
a_0&=0\\
a_1&\approx 0.6832\\
a_2&\approx 0.0001\\
b_1&\approx -1.5697\\
b_2&\approx 0.6063.
\end{aligned}
$$

Mikäli mittauksissa on kohinaa, mikä on tyypillinen tapaus, niin parametrit voidaan estimoida esimerkiksi PNS:llä, jolloin mukaan otetaan N kappaletta yhtälöitä. Tässä tapauksessa ratkaisuksi saadaan

$$
\begin{aligned}
a_0&=0\\
a_1&\approx 0.6832\\
a_2&\approx 0\\
b_1&\approx -1.5698\\
b_2&\approx 0.6066.
\end{aligned}
$$

Pienet erot johtuvat mittausarvojen pyöristyksestä, eli varsinaista kohinaa ei ole. Nyt siis riitti ottaa huomioon yhtä monta yhtälöä kuin estimoitavia parametreja.

3. Wiener-Hopfin yhtälö on

$$r_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) r_{uu}(\tau - k),$$

eli y:n ja u:n ristikovarianssi riippuu impulssivasteen $h(k)$ ja u:n autokovarianssin konvoluutiosta. Valkoiselle kohinalle pätee

$$r_{uu}(\tau) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{kun } \tau = 0 \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Nyt siis Wiener-Hopf yhtälö saa muodon

$$\begin{aligned} r_{yu}(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k) r_{uu}(\tau - k) \\ &= h(0) r_{uu}(\tau) + h(1) r_{uu}(\tau - 1) + \cdots + h(\tau) r_{uu}(\tau - \tau) + \ldots \\ &= h(\tau) r_{uu}(\tau - \tau) = h(\tau) r_{uu}(0). \end{aligned}$$

Siten

$$r_{yu}(i) = h(i)\sigma^2,$$

eli

$$h(i) = \frac{1}{\sigma^2} r_{yu}(i),$$

joten impulssivasteen estimaatti saadaan normeeraamalla ristikovarianssin estimaatti u:n varianssin estimaatilla, eli

$$\hat{h}(i) = \frac{\hat{r}_{yu}(i)}{\hat{\sigma}^2},$$

missä N havaintoon perustuvat estimaatit ovat

$$\hat{r}_{yu}(i) = \frac{1}{N - \max(i, 0)} \sum_{k=1}^{N - \max(i,0)} y(k + i) u(k)$$

ja

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} u_k^2.$$

4. Wiener-Hopf yhtälö on esitetty edellisessä tehtävässä. Oletetaan tässä tehtävässä, että impulssivaste on nolla alkaen jostain indeksistä s, eli $h(\tau) = 0$, kun $\tau > s$. Tällöin

$$r_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{s} h(k) r_{uu}(\tau - k).$$

Yhtälö voidaan nyt kirjoittaa matriisimuodossa

$$r_{yu} = R_{uu} h,$$

missä

$$
\begin{aligned}
r_{yu} &= \begin{bmatrix} r_{yu}(0) & \dots & r_{yu}(s) \end{bmatrix}^T, \\
h &= \begin{bmatrix} h(0) & \dots & h(s) \end{bmatrix}^T \\
R_{uu} &= \begin{bmatrix} r_{uu}(0) & r_{uu}(-1) & \dots & r_{uu}(-s) \\ r_{uu}(1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ r_{uu}(s) & r_{uu}(s-1) & \dots & r_{uu}(0) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Impulssivasteen estimaatti saadaan ratkaistua yhtälöstä

$$\hat{h} = \hat{R}_{uu}^{-1} \hat{r}_{yu},$$

missä estimaatit $\hat{r}_{uu}$ ja $\hat{r}_{yu}$ saadaan kuten edellisessä tehtävässä.

5. a) Tehtävän ratkaisemisessa käytetään oppikirjan CRA-algoritmia. Algoritmi koostuu viidestä vaiheesta:

   (i) Kerää data $y(k)$ ja $u(k)$, $i = 1, \dots, N$.

   (ii) Muunna sisäänmeno ja ulostulo nollakeskiarvoisiksi:

$$
\begin{aligned}
\bar{y}(k) &= y(k) - \frac{1}{N} \sum y(k) \\
\bar{u}(k) &= u(k) - \frac{1}{N} \sum u(k).
\end{aligned}
$$

   (iii) Seuraavaksi tavoitteena on konstruoida suodin $A(q)$, joka suodattaa sisäänmenon valkoiseksi kohinaksi. Tyypillinen lähestymistapa ongelmaan on mallintaa sisäänmeno AR-prosessina $A(q)\bar{u}(t) = e(t)$. Tällöin saadaan suodatettu signaali

$$u_F(t) = A(q)\bar{u}(t).$$

   Suodatetaan myös ulostulo samalla suotimella, jolloin saadaan

$$y_F(t) = A(q)\bar{y}(t).$$

   Suotimen parametrit a voidaan estimoida datasta PNS:lla. Oletetaan, että suotimen kertaluku on n, jolloin jäännöstermeiksi saadaan

$$
\begin{aligned}
e(t) &= u(t-1)a_1 + u(t-2)a_2 + \dots + u(t-n)a_n + u(t) \\
&= \begin{bmatrix} u(t-1) & \dots & u(t-n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + u(t).
\end{aligned}
$$

   Kootaan jäännöstermit yhdeksi pystyvektoriksi, jolloin saadaan matriisimuodossa

$$
e = \begin{bmatrix} u(N-1) & u(N-2) & \dots & u(N-n) \\ u(N-2) & u(N-3) & \dots & u(N-n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(1) & u(0) & \dots & u(-n+2) \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} u(N) \\ \vdots \\ \\ u(2) \end{bmatrix},
$$

jota merkitään

$$e = Ua + u.$$

PNS-estimoinnissa parametrit estimoidaan ratkaisemalla tehtävä

$$\min_a e^T e = (Ua + u)^T (Ua + u),$$

jolle saadaan ratkaisu etsimällä gradientin nollakohta yhtälöstä

$$\nabla (Ua + u)^T (Ua + u) = 0,$$

mistä saadaan ratkaistua estimaatti

$$\hat{a} = -(U^T U)^{-1} U^T u.$$

(iv) Nyt alkuperäiselle systeemille pätee

$$y(t) = \sum_\tau h(\tau) u(t - \tau).$$

Koska filtteröinti on lineaarinen operaatio saadaan

$$A(q) y(t) = \sum_\tau h(\tau) A(q) u(t - \tau),$$

joten

$$y_F(t) = \sum_\tau h(\tau) u_F(t - \tau),$$

eli u_F:n ja y_F:n kytkee sama pulssinsiirtofunktio kuin u:n ja y:n. Siten voidaan estimoida impulssivaste h suodatettujen signaalien avulla.

Oletetaan nyt, että käytetty malli onnistuu suodattamaan ohjauksen valkoiseksi kohinaksi. Tällöin saadaan estimoitua impulssivaste vastaavasti kuten tehtävässä 3, eli

$$\hat{h}(\tau) = \frac{\hat{r}_{y_F u_F}(\tau)}{\hat{\sigma}^2}.$$

Kokeilemalla suotimia A kertalukua 1, 2 ja 3 havaitaan, että paras tulos saadaan valitsemalla suurin kertaluku. Toisaalta ero ei näyttäisi olevan kovin iso 2. ja 3. kertaluvun suotimien välillä.

b) Kun verrataan oikean systeemin antamaa impulssivastetta huomataan, että impulssivasteen estimaatti näyttäisi olevan harhainen, koska vaikka N:ää suurennetaan, jää estimaatin ja todellisuuden välille selvä ero.

Tämä johtuu siitä, että todellisuudessa annettu sisäänmenosignaali onkin peräisin ARMA-prosessista

$$u(t) = f_1 u(t - 1) + f_2 u(t - 2) + g\varepsilon(t - 1) + \varepsilon(t),$$

joten käytetty valkaisusuodin ei suodata sisäänmenoa valkoiseksi kohinaksi. Varsin hyviä tuloksia saadaan kuitenkin, jos u on peräisin esimerkiksi AR-prosessista, jossa $g = 0$ (katso matlab-tiedosto las07t5bgen.m, kokeile!). Saadaksesi hyvän sovituksen voit joutua muuttelemaan aikasarjan pituutta tai kohinan varianssia.