Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-E2129 Systeemien identifiointi

8. harjoituksen ratkaisut

1. Annettu siirtofunktio on siis $G(s)$ ja vastaava systeemi on stabiili. Heräte (sisäänmeno) on $u(t) = A\sin(\omega t)$, jonka Laplace-muunnos on

$$U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2},$$

ja vasteen Laplace-muunnos on siten

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{G(s)A\omega}{(s - \omega i)(s + \omega i)}.$$

Nyt saadaan vaste käänteismuuntamalla $Y(s)$.

Käänteismuunnos onnistuu, kun kirjoitetaan Y:lle osamurtokehitelmä

$$Y(s) = \underbrace{\frac{C_1}{s - \omega i} + \frac{C_2}{s + \omega i}}_{Y_1(s)} + \underbrace{\sum \frac{K_i}{(s + p_i)}}_{Y_2(s)},$$

missä $Y_1(s)$ vastaa U:hun liittyviä vasteita ja $Y_2(s)$ G:hen liittyviä. Siis $-p_i$:t ovat $G(s)$:n navat. Käänteismuunnetaan nyt tämä. Ennen muunnosta on kuitenkin syytä huomata, että kun järjestelmä on stabiili, niin G:hen liittyvät aikatason vasteet $y_2(t)$ konvergoivat nollaan! Ts.

$$\lim_{t\to\infty} y_2(t) = 0$$

Yleisesti ottaen osamurtokehitelmässä määrättävät vakiokertoimet löydetään seuraavasti:

$$K_i = \lim_{s\to -p_i} (s + p_i)Y(s),$$

joten

$$C_1 = \lim_{s\to i\omega} (s - i\omega)Y(s) = \frac{A}{2i}G(i\omega),$$

ja

$$C_2 = \lim_{s\to -i\omega} (s + i\omega)Y(s) = -\frac{A}{2i}G(-i\omega),$$

eli steady state ratkaisu Laplace-tasossa on

$$Y_{ss}(s) = \frac{AG(i\omega)}{2i(s - i\omega)} + \frac{AG(-i\omega)}{-2i(s + i\omega)}.$$

Napakoordinaattimuodosta

$$G(i\omega) = |G(i\omega)|e^{i\phi},$$

missä $\phi = \arg G(i\omega)$ saadaan, että

$$Y_{ss}(s) = \frac{A|G(i\omega)|}{2i}\left(\frac{e^{i\phi}}{s-i\omega} - \frac{e^{-i\phi}}{s+i\omega}\right).$$

Nyt käänteismuuntamalla saadaan, että

$$y_{ss}(t) = A|G(i\omega)|\frac{e^{i\phi}e^{i\omega t} - e^{-i\phi}e^{-i\omega t}}{2i},$$

koska $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\right) = e^{-at}$. Koska $e^{i\omega t} = i\sin(\omega t) + \cos(\omega t)$, $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ ja $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$, saadaan

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= A|G(i\omega)|\frac{e^{i\phi+i\omega t} - e^{-i\phi-i\omega t}}{2i} \\ &= A|G(i\omega)|\sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Siten jos heräte on siniä, jonka taajuus on ω, niin alkutransientin jälkeen saadaan vasteena siniä, jonka amplitudi on vahvistunut tekijällä $|G(i\omega)|$ ja vaihe on siirtynyt $\arg G(i\omega)$.

2. Nyt siis

$$u(t) = a\sin(\omega t),$$

ja

$$y(t) = Ka\sin(\omega t + \phi),$$

missä edellisen tehtävän nojalla $K = |G(i\omega)|$ ja $\phi = \arg G(i\omega)$. Nyt käyttämällä kulman summan sinin laskukaavaa

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta),$$

saadaan

$$y(t) = Ka(\sin(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\sin\phi),$$

josta saadaan

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{\sin(\phi)}\left(\frac{y(t)}{Ka} - \sin(\omega t)\cos\phi\right),$$

missä $\sin(\omega t) = \frac{u(t)}{a}$. Koska $\sin(\omega t)^2 + \cos(\omega t)^2 = 1$ saadaan

$$\left(\frac{u(t)}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin\phi}\left(\frac{y(t)}{Ka} - \frac{u(t)}{a}\cos\phi\right)\right)^2 = 1,$$

eli

$$u(t)^2 + \left(\frac{y(t) - Ku\cos\phi}{K\sin\phi}\right)^2 = a^2,$$

josta saadaan

$$\left(1+(\cot\phi)^2\right)u^2+\frac{1}{(K\sin\phi)^2}y^2-2\frac{\cos\phi}{K(\sin\phi)^2}yu=a^2,$$

mikä vastaa (u, y)-tason ellipsiä. Näytetään, että se vastaa tehtävänannossa kuvattua ellipsiä.

Selvästi u:n maksimi on a, joka saavutetaan, kun $\sin(\omega t) = 1$, jolloin $\cos(\omega t) = 0$ ja $y = Ka\cos\phi$.

Vastaavasti y:n maksimi on Ka ja se saavutetaan kun $\sin(\omega t+\phi) = 1$, eli $\omega t+\phi = \frac{\pi}{2}$. Tällöin

$$u = a\sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) = a\left(\sin\frac{\pi}{2}\cos\phi-\cos\frac{\pi}{2}\sin\phi\right) = a\cos\phi.$$

3. Sisäänmeno on siis $u(t) = 2\sin t$, jota vastaava ulostulo on $y(t) = b\sin(t+\phi)$, missä b on vahvistus ja ϕ vaihesiirto.

   Ulostuloa on havainnoitu 0.1 sekunnin välen jaksolta $t \in [0, 40]$. Siten mittaukset on suoritettu aikahetkinä $t_i = i\Delta t = 0.1i$.

   Integroidaan nyt sinin ja ulostulon tuloa:

$$\begin{aligned}
y_s(T) &= \int_{t_0}^{t_0+T} y(t)\sin(t)dt \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} b\sin(t+\phi)\sin(t)dt + \int_{t_0}^{t_0+T} e(t)\sin(t)dt \\
&= \frac{bT}{2}\cos\phi - \frac{b}{2}\int_{t_0}^{t_0+T}\cos(2t+\phi)dt + \int_{t_0}^{t_0+T} e(t)\sin(t)dt.
\end{aligned}$$

   Huom: Integrointi aloitetaan tässä t_0:sta, joka valitaan s.e. alkutransientin vaikutus on käytännössä hävinnyt; valitaan tässä esimerkissä $t_0 = 10$. Jos integrointivälin pituus T on jokin sinin jaksonpituuden monikerta ja oletetaan, että $e(t)$ on pieni, niin

$$y_s(T) = \frac{bT}{2}\cos\phi \tag{1}$$

   Tässä esimerkissä voidaan valita $T = k2\pi = 8\pi$.

   Alkuperäistä integraalia voidaan approksimoida summalla

$$y_s(T) \approx \sum_i y(t_i)\sin(t_i)\Delta t,$$

   jonka avulla saadaan datasta valitsemalla Δt ja t_0 sopivasti, että $y_s(T) \approx 0.79$.

   Sitten tehdään samat temput kosinille:

$$\begin{aligned}
y_c(T) &= \int_{t_0}^{t_0+T} y(t)\cos(t)dt \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} b\sin(t+\phi)\cos(t)dt + \int_{t_0}^{t_0+T} e(t)\cos(t)dt \\
&= \frac{bT}{2}\sin\phi - \frac{b}{2}\int_{t_0}^{t_0+T}\sin(2t+\phi)dt + \int_{t_0}^{t_0+T} e(t)\cos(t)dt,
\end{aligned}$$

joten

$$y_c(T) = \frac{bT}{2}\sin\phi. \tag{2}$$

Approksimoimalla integraalia summalla saadaan datasta, että $y_c(T) \approx -99.8$.

Näin yhtälöistä (1) ja (2) saadaan, että

$$b = \frac{2}{T}\sqrt{y_s^2 + y_c^2} \approx 7.95,$$

ja

$$\phi = \arctan\frac{y_c}{y_s} \approx -1.56,$$

eli $\phi = -89$ astetta.

Taajuudella $\omega = 1$ vahvistus on siten $20\lg\frac{b}{a} = 12$ (db). Numeeriset laskut on tehty Matlab-skriptillä las08t3.m.

Piirrä Matlabin funktioilla bode todellisen systemin Boden diagrammi. Näet, että estimaatit ovat varsin hyvät.

4. Lasketaan ensin navat:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0,$$

jonka ratkaisuna on

$$s_{12} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

Jotta systeemi on asymptoottisesti stabiili tulee napojen olla aidosti vasemmassa puolitasossa, josta saadaan ehto

$$\zeta > 0.$$

Nyt tarkastellaan taajuusvastefunktiota

$$G(i\omega) = \frac{\omega_n^2}{(i\omega)^2 + 2i\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + i2\zeta\omega_n\omega}.$$

a) Asetetaan $\omega = \omega_n$, jolloin

$$G(i\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega_n^2 + 2i\zeta\omega_n\omega_n} = \frac{1}{i2\zeta} = \frac{-1}{2\zeta}i.$$

Tämän vaihekulma on $\frac{\pi}{2}$, mikä vastaa -90 asteen vaihesiirtoa.

b) Resonanssitaajuudella tarkoitetaan taajuutta ω, joka maksimoi vahvistuskertoimen $|G(i\omega)|$. Nyt

$$\begin{aligned}
|G(i\omega)| &= \left|\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega_n\omega}\right| \\
&= \left|\frac{\omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2 - 2i\zeta\omega_n\omega)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}\right| \quad \text{lavennettu nimittäjän kompleksikonjugaatilla} \\
&= \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2} \\
&= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}.
\end{aligned}$$

Tämä saavuttaa luonnollisesti maksiminsa kun nimittäjä saavuttaan miniminsä. Siten minimoidaan funktiota

$$f(\omega) = (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2.$$

Minimi löytyy helposti f:n derivaatan nollakohdasta:

$$\begin{aligned} f'(\omega) &= 2(\omega_n^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\zeta^2\omega_n^2\omega \\ &= 4\omega(\omega^2 + (2\zeta^2 - 1)\omega_n^2) = 0, \end{aligned}$$

joten $\omega = 0$ tai $\omega = \pm\sqrt{1 - 2\zeta^2}\omega_n$. Ensimmäinen juuri ei ole kiinnostava ja jälkimmäinen on reaalinen, jos $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Siten resonanssitaajuus on

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}, \text{ kun } 0 \le \zeta < 0.707$$

Näin maksimivahvistukseksi tulee

$$|G(i\omega_r)| = \cdots = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}. \tag{3}$$

Näillä a)- ja b)-kohtien tuloksilla voidaan systeemi identifioida kahdella eri tavalla.

(i) Haetaan taajuus $\hat{\omega}$, jolla vaihesiirto on 90 astetta. Tällöin siis $\omega_n = \hat{\omega}$.

(ii) Etsitään resonanssitaajuus $\hat{\omega}_r$ ja mitataan tätä vastaava vahvistuskerroin $\hat{G}$. Siten saadaan ratkaistua ζ.

5. a) Fourieranalyysissä lähtökohtana on estimoida systeemin taajuusvaste $G(i\omega)$ lähtien liikkeelle Fourier-muunnetusta systeemistä

$$Y(\omega) = G(i\omega)U(\omega).$$

Mittauksista voidaan laskea sisäänmenon ja ulostulon Fourier-muunnokset

$$Y_S(\omega) = \int_0^S y(t)e^{-i\omega t}dt, \text{ ja } U_S(\omega) = \int_0^S u(t)e^{-i\omega t}dt,$$

joissa integroidaan äärellisen aikavälin yli, koska mittauksia on aina vain äärelliseltä aikaväliltä $t \in [0, S]$. Lisäksi mittausdata on käytännössä näytteistettyä, jolloin käytännössä lasketaan diskreetit Fourier-muunnokset. Näin saadaan estimaatti taajuusvasteelle

$$\hat{G}_S(i\omega) = \frac{Y_S(\omega)}{U_S(\omega)}.$$

Tätä kutsutaan empiiriseksi siirtofunktioestimaatiksi (empirical transfer function estimate, ETFE).

Laskut voit laskea skriptillä las08t5a.m.

b) Spektraalianalyysissä estimoidaan sisäänmenon ja ulostulon spektrejä, joka saadaan kaavasta (tämä ei ole luonnollisesti ainoa vaihtoehto; tutki oppikirjasta muitakin estimaatteja)

$$\hat{\hat{\Phi}}_N(\omega) = \frac{1}{N}|U_N(\omega)|^2,$$

missä

$$U_N(\omega) = \sum_{k=1}^{N} u(k)e^{-i\omega k} \text{ (u:n diskreetti Fourier-muunnos).}$$

Estimaattia $\hat{\hat{\Phi}}_N(\omega)$ kutsutaan periodogrammiksi. Estimaatin ongelma on, että se tuottaa epätasaisia estimaatteja. Siksi on tapana tasoittaa estimaattia. Esimerkiksi Blackman-Tuckey menetelmässä muodostetaan tasoitettu periogrammi

$$\hat{\Phi}_N(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\omega - \xi)\hat{\hat{\Phi}}_N(\xi)d\xi,$$

missä ikkunafunktiolle W_γ pätee

$$\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\omega)d\omega = 1.$$

Indeksi γ viittaa ikkunan leveyteen.

Oppikirjan appendixissa on osoitettu, että tämä tasoitus voidaan kirjoittaa aikatasossa muodossa

$$\hat{\Phi}_N(\omega) = \sum_{k=-\gamma}^{\gamma} w_\gamma(k)\hat{R}_u^N(k)e^{-i\omega k},$$

missä $w_\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi)e^{i\xi k}d\xi$ (Fourier-käänteismuunnos) ja $\hat{R}_u^N(k) = \frac{1}{N}\sum_t u(t+k)u(t)$ (sisäänmenon autokovarianssin estimaatti).

Tyypillisesti valitaan

$$w_\gamma(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi k}{\gamma}\right)\right), & \text{kun } |k| < \gamma \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

jota kutsutaan Hamming aikaikkunaksi. Vapaasti valittavaksi parameriksi siis jää γ.

Vastaavasti saadaan ristispektrille tasoitettu estimaatti

$$\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega) = \sum_{k=-\gamma}^{\gamma} w_\gamma(k)\hat{R}_{yu}^N(k)e^{-i\omega k}.$$

Spektreille pätee (vrt. 2. luento ja laskuharjoitukset sekä oppikirjan appendix)

$$\Phi_{yu}(\omega) = G(i\omega)\Phi_u(\omega),$$

josta saadaan estimaatti taajuusvasteelle

$$\hat{\hat{G}}_N(i\omega) = \frac{\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)}{\hat{\Phi}_u^N(\omega)}$$

Systeemi $Y(s) = G(s)U(s) + V(s)$ voidaan kuvata spektrien avulla seuraavasti:

$$\Phi_y(\omega) = |G(i\omega)|^2\Phi_u(\omega) + \Phi_v(\omega),$$

jolloin kohinan spektriksi saadaan

$$\hat{\Phi}_v^N(\omega) = \hat{\Phi}_y^N(\omega) - \frac{|\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)|^2}{\hat{\Phi}_u^N(\omega)}.$$

Laskut voit laskea IDE-toolboxin käyttöliittymällä tai skriptillä las08t5b.m.

6. Siis

$$\begin{aligned}
\theta &= \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n & b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}^T \\
\phi(t) &= \begin{bmatrix} \cos\omega_1 t & \dots & \cos\omega_n t & \sin\omega_1 t & \dots & \sin\omega_n t \end{bmatrix}^T \\
y(t) &= \phi^T(t)\theta = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t\right),
\end{aligned}$$

missä $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$. Estimoidaan nyt tälle tehtävälle PNS-estimaatit

$$\begin{aligned}
\hat{\theta} &= (\phi^T\phi)^{-1}\phi^T y \\
&= \left(\sum_{t=1}^{N} \phi(t)\phi(t)^T\right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{N} \phi(t)y(t)\right)
\end{aligned}$$

Jossa $\sum_{t=1}^{N} \phi(t)\phi(t)^T =$

$$\begin{bmatrix}
\sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_1 t)^2 & \sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) & \dots & \sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_1 t)\sin(\omega_n t) \\
\sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_2 t)\cos(\omega_1 t) & \sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_2 t)^2 & \dots & \sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_2 t)\sin(\omega_n t) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_1 t)\sin(\omega_n t) & \sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_2 t)\sin(\omega_n t) & \dots & \sum_{t=1}^{N} \sin(\omega_n t)^2
\end{bmatrix}$$

ja $\sum_{t=1}^{N} \phi(t)y(t) =$

$$\begin{bmatrix}
\sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_1 t)y(t) \\
\vdots \\
\sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_n t)y(t) \\
\sum_{t=1}^{N} \sin(\omega_1 t)y(t) \\
\vdots \\
\sum_{t=1}^{N} \sin(\omega_n t)y(t)
\end{bmatrix}$$

Käännettävässä neliömatriisissa $\sum_{t=1}^{N} \phi(t)\phi(t)^T$ on siis termejä

$$\sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_k t)\cos(\omega_p t)$$

$$\sum_{t=1}^{N} \sin(\omega_k t)\sin(\omega_p t)$$

$$\sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_k t)\sin(\omega_p t).$$

Käytetään hyväksi kulmien summan ja erotuksen laskentakaavoja, niin saadaan lausuttua nämä summissa esiintyvät tulotermit muodossa

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)) \\
\sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) \\
\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))
\end{aligned}$$

Tutkitaan siis summia

$$\sum_{t=1}^{N} \cos\left((k-p)\frac{2\pi}{N}t\right)$$

ja

$$\sum_{t=1}^{N} \sin\left((k-p)\frac{2\pi}{N}t\right).$$

Kiinteillä k ja p kulma juoksee diskreetisti yhden jakson verran, kun $t \in \{1, \ldots, N\}$, jolloin nämä molemmat summat menevät nolliksi, mikäli $k \neq p$. Jos $k = p$ niin ensimmäinen lauseke saa arvon $\cos(0) = 1$ ja jälkimmäinen arvon $\sin(0) = 0$.

Siten

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_k t)\cos(\omega_p t) &= \frac{N}{2}\delta_{k,p} \\
\sum_{t=1}^{N} \sin(\omega_k t)\sin(\omega_p t) &= \frac{N}{2}\delta_{k,p} \\
\sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_k t)\sin(\omega_p t) &= 0,
\end{aligned}$$

missä $\delta_{k,p} = 1$, kun $k = p$ ja 0 muuten. Näin saadaan, että käännettävä matriisi onkin $2N \times 2N$-diagonaalimatriisi (diagonaalilla termejä $N/2$), jolloin

$$\hat{\theta} = \left(\frac{N}{2}I\right)^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_1 t)y(t) \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_n t)y(t) \\ \sum_{t=1}^{N} \sin(\omega_1 t)y(t) \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{N} \sin(\omega_n t)y(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{N} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_1 t)y(t) \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{N} \cos(\omega_n t)y(t) \\ \sum_{t=1}^{N} \sin(\omega_1 t)y(t) \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{N} \sin(\omega_n t)y(t) \end{bmatrix}$$