Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-E2129 Systeemien identifiointi

8. laskuharjoitus

1. Olkoon stabiilin lineaarisen dynaamisen järjestelmän siirtofunktio $G(s)$. Määrää järjestelmän vaste sinimuotoiselle herätteelle $u(t) = a \sin \omega t$ tasapainotilassa (transientti on hävinnyt).

2. Eräs tapa vahvistuksen ja vaihesiirron määrittämiseksi taajuudella ω on piirtää ulostulo $y(t)$ ohjauksen $u(t)$:n funktiona. Osoita, että tällöin funktioista

$$u(t) = a \sin \omega t$$
$$y(t) = Ka \sin(\omega t + \phi)$$

saadaan kuvassa 1 näkyvä kuvaaja.

3. Jatkuva-aikaiseen systeemiin syötetään ohjaus $u(t) = 2 \sin t$, jolloin 0.1 sekunnin välein mitattu ulostulo on kuvan 2 mukainen (huomaa alkutransientti!).

   Taajuusvasteen laskennassa voidaan parantaa tulosta käyttämällä hyväksi tietoa että kun sisäänmeno on sini, myös ulos tulee siniä samalla taajuudella. Korreloimalla (integroimalla tuloa) mahdollisesti kohinainen ulostulo sinin ja kosinin kanssa ja valitsemalla integrointiaika sopivasti saadaan vahvistus ja vaihekulma laskettua hyvinkin tarkasti. Laske allaolevassa kuvassa esitettyjen y:n ja u:n perusteella systeemin vahvistus ja vaihekulma u:n sisältämällä taajuudella.

   Vertaa tulosta todellisen systeemin

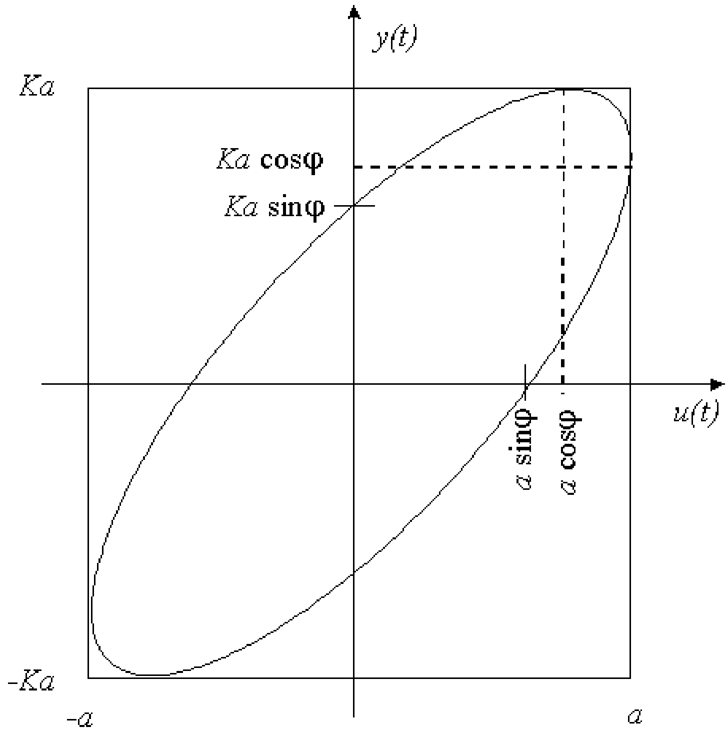
$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 0.5s + 1}$$

   Boden diagrammiin.

4. Osoita, että seuraavan toisen asteen siirtofunktion (kompleksiset navat ja ei nollia)

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

   a) Vaihesiirto on 90°, kun $\omega = \omega_n$.



Kuva 1: Tehtävän 2 kuvaaja

b) Kun $\zeta < 0.707$, resonanssitaajuus on

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

ja maksimi suuruus vahvistukselle $|G(j\omega)|$ on

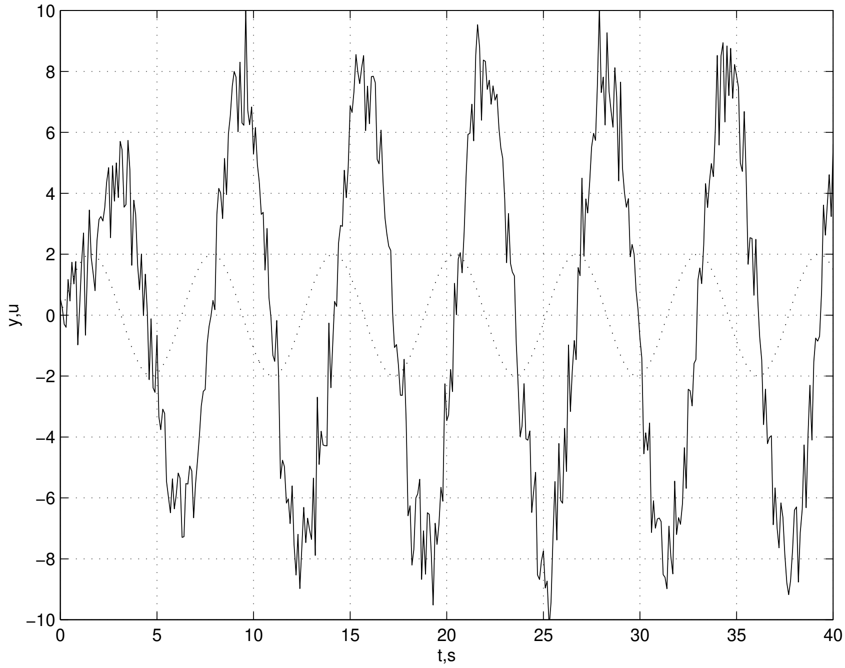
$$M_m = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Kuinka käyttäisit hyväksesi näitä lukuja ratkaistaksesi tällaisen systeemin siirtofunktion taajuusvasteesta?

5. Tarkastellaan edellisen harjoituksen tehtävän 5 dataa. Laske datan perusteella

a) y:n ja u:n diskreetit Fouriermuunnokset ja systeemin empiirinen siirtofunktioestimaatti ETFE.

b) y:n ja u:n sopivasti tasoitetut periodogrammit ja niiden avulla systeemin taajuusvaste ja kohinan spektri.



Kuva 2: Tehtävän 3 ja kohinainen vaste

6. Tarkastellaan regressiomallia $y(t) = \Phi^T(t)\theta$, jossa

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n & b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}^T$$
$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos\omega_1 t & \dots & \cos\omega_n t & \sin\omega_1 t & \dots & \sin\omega_n t \end{bmatrix}^T$$

missä $\omega_k = 2\pi k/N$ ja $n \leq N/2$. Regressiomallilla on siis mahdollista esittää harmoninen sarjakehitelmä:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t) \quad t = 1, \dots, N$$

Osoita, että pienimmän neliösumman estimaatit $\{a_k\}$ ja $\{b_k\}$ ovat samat kuin Fourier-kertoimet:

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N} y(t) \cos\omega_k t$$
$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N} y(t) \sin\omega_k t$$