Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-E2129 Systeemien identifiointi

9. laskuharjoitus

1. Mallien

   (i)
   $$\left(1 - aq^{-1}\right) y(t) = bq^{-1}u(t) + e(t) \tag{1}$$

   (ii)
   $$y(t) = \frac{bq^{-1}}{1 - aq^{-1}} u(t) + e(t) \tag{2}$$

   parametrit (2 kpl) estimoidaan tavallisella pienimmän neliösumman keinolla. Ovatko estimaatit harhattomia? Entä tarkentuvia? Virhe $e(t)$ oletetaan valkoiseksi kohinaksi.

2. Tarkastellaan mallirakennetta:

   $$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t),$$

   jonka parametrivektori on

   $$\theta = (b_1, \ldots, b_{n_b}, c_1, \ldots, c_{n_c}, d_1, \ldots, d_{n_d}, f_1, \ldots, f_{n_f}).$$

   Laske ennustevirheen gradientti
   $$\frac{\partial \varepsilon(t, \theta)}{\partial \theta}.$$

3. Olkoon $V(\theta)$ θ:n analyyttinen funktio. Iteratiivinen algoritmi $V(\theta)$:n minimoimiseksi saadaan seuraavalla tavalla. Olkoon θ^k tulos k:nnella iteroinnilla. Asetetaan θ^{k+1} siten, että se on $V(\theta)$:n neliöllisen approksimaation minimikohta, missä approksimaatio on laskettu pisteen θ^k ympäristössä. Näytä, että johdettu algoritmi on Newton-Raphson algoritmi, missä $\alpha_k = 1$.

4. GPS (Navstar Global Positioning System) on Yhdysvaltain puolustusministeriön ylläpitämä, kaikille avoin satelliittipaikannusjärjestelmä. Se koostuu yli 20:stä maata

n. 20 000 km:n korkeudella kiertävästä satelliitista. Satelliitit radioivat paikannusvastaanottimille sekä oman paikkansa että signaalin, jonka kulkuajan perusteella vastaanotin laskee etäisyyden satelliittiin. Satelliitille i ja vastaanottimelle pätee

$$(s_{i1} - x)^2 + (s_{i2} - y)^2 + (s_{i3} - z)^2 = (r_i - \tau)^2,$$

missä s_{ij} on satelliitin (tunnettu) sijainti, x, y, z vastaanottimen koordinaatit, r_i etäisyys satelliittiin ja τ vastaanottimen kellon poikkeama Δt satelliitin kellosta matkaksi muutettuna ($\tau \approx c\Delta t$).

a) Koska vastaanottimissa ei ole atomikelloja, yleisesti $\Delta t \neq 0$. Miten kulkuaika ja täten etäisyys satelliittiin pystytään ratkaisemaan, vaikka Δt:tä ei tunneta?

b) Käytännössä etäisyysmittaukset sisältävät huomattavan paljon kohinaa. Hahmottele algoritmi paikanmääritykseen, kun käytössä on n:n satelliitin lähetystieto.

5. Tarkastellaan jatkuvan vahvistuksen systeemiä

$$y(t) = bu(t) + e(t), \quad t = 1, 2, 3, \ldots$$

missä $\mathrm{E}[e(t)] = 0$, $\mathrm{E}[e(t)e(s)] = \delta_{t,s}$ (eli $\mathrm{E}[e(t)e(t)] = 1$ ja $\mathrm{E}[e(t)e(s)] = 0$ kun $t \neq s$) ja $u(t)$ on ei-satunnainen signaali. Tuntematon parametri $\hat{b}$ estimoidaan kaavasta (painotettu PNS)

$$\hat{b} = \arg\min \sum_{t=1}^{N} \lambda^{N-t} (y(t) - bu(t))^2,$$

missä N on käytettävissä olevien mittausten määrä ja $0 < \lambda \leq 1$ unohduskerroin. Laske $\mathrm{Var}[\hat{b}] = \mathrm{E}[(\hat{b} - b)^2]$. Osoita, että jos $\lambda = 1$ niin $\mathrm{Var}[\hat{b}] \to 0$, kun $N \to \infty$. Osoita myös, että kun $\lambda < 1$, niin on olemassa signaaleja $u(t)$, joille tämä ei päde.

6. Identifiointikokeesta on kerätty Matlab-tiedoston las09t7.mat mukainen data. Sovita siihen

a) ARX-malli

b) Ulostulovirhe (OE)-malli

c) ARMAX-malli

d) Box-Jenkins (BJ)-malli

Minkä mallin valitsisit?