Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-E2129 Systeemien identifiointi

10. harjoituksen ratkaisut

1. Näytetään ensin siirtofunktiomalli.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (-k_{01} - k_{21})x_1 + k_{12}x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= k_{21}x_1 + (-k_{02} - k_{12})x_2 + u_2.\end{aligned}$$

Tehdään Laplace-muunnos:

$$\begin{aligned}sX_1 &= (-k_{01} - k_{21})X_1 + k_{12}X_2 + U_1 \\ sX_2 &= k_{21}X_1 + (-k_{02} - k_{12})X_2 + U_2.\end{aligned}$$

Ratkaistaan nyt alemmasta X_2:

$$X_2 = \frac{k_{21}X_1 + U_2}{s + k_{02} + k_{12}},$$

joka voidaan sijoittaa ylempään, jolloin saadaan

$$sX_1 = (-k_{01} - k_{21})X_1 + k_{12}\frac{k_{21}X_1 + U_2}{s + k_{02} + k_{12}} + U_1,$$

joten

$$X_1 = \frac{(s + k_{02} + k_{12})U_1 + k_{12}U_2}{s^2 + \underbrace{(k_{01} + k_{21} + k_{02} + k_{12})}_{=A}s + \underbrace{k_{01}k_{02} + k_{01}k_{12} + k_{02}k_{21}}_{=B}}.$$

Lisäksi

$$Y = c_1X_1 = c_1\frac{(s + k_{02} + k_{12})U_1 + k_{12}U_2}{s^2 + As + B},$$

joten Y:n annettu siirtofunktioesitys on OK.

Nyt tarkastellaan impulssi- ja askelvasteita. Impulssivasteen $u(t) = a_0\delta(0)$ Laplace-muunnos on $U(s) = a_0$ ja askelfunktion $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ b_0, & t \geq 0 \end{cases}$ Laplace-muunnos on $U(s) = \frac{b_0}{s}$.

Seuraavissa kohdissa käytetään hyväksi tietoa, että signaalista

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

voidaan (ainakin periaatteessa) estimoida parametrit $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ ja $a_{n-1}, \ldots, a_0$.

a) Nyt ohjaukset u_1 ja u_2 ovat *erikseen* syötettyjä impulsseja. Tarkastellaan tapaukset, joissa toinen on yksikköimpulssi ($U_1 = 1$) ja toinen nolla ($U_2 = 0$). Nyt

$$Y(s) = \frac{c_1(s + k_{02} + k_{12})}{s^2 + As + B}.$$

Vasteen avulla voidaan identifioida vakiot c_1, $c_1(k_{02} + k_{12})$, A ja B.

Vastaavasti valitaan sisäänmenoiksi $U_1(s) = 0$ ja $U_2(s) = 1$, jolloin

$$Y(s) = \frac{c_1 k_{12}}{s^2 + As + B},$$

josta saadaan identifioitua vakiot c_1k_{12}, A ja B. Saatiin siis viidelle tuntemattomalle parametrille $(c_1, k_{01}, k_{02}.k_{12}, k_{21})$ viisi yhtälöä (c_1:n, c_1k_{12}:n, $c_1(k_{02}+k_{12})$:n, A:n ja B:n arvot), joista saadaan kaikki parametrit estimoitua.

Impulssin korvaaminen askeleella sisäänmenossa kasvattaa tässä tapauksessa vain nimittäjän astelukua, eli identifioituvat vakiot eivät muutu.

b) Nyt $U_1 = U_2 = 1$ ja siten

$$Y(s) = \frac{c_1(s + k_{02} + 2k_{12})}{s^2 + As + B},$$

joten vasteesta saadaan vakiot c_1, $c_1(k_{02}+2k_{12})$, A ja B. Viidelle tuntemattomalle on nyt siis vain neljä yhtälöä. Ensimmäisestä yhtälöstä c_1 saadaan estimoitua suoraan, mutta muita parametreja ei voida identifioitua.

Vastaava tulos saadaan, jos molemmat sisäänmenot ovat askeleita.

c) Nyt $U_1(s) = \frac{1}{s}$ ja $U_2(s) = 1$, ja

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{c_1((s + k_{02} + k_{12})\frac{1}{s} + k_{12})}{s^2 + As + B} \\ &= \frac{c_1((s + k_{02} + k_{12}) + k_{12}s)}{s^3 + As^2 + Bs}. \end{aligned}$$

Siten vasteesta saadaan ratkaistua vakiot $c_1(1 + k_{12})$, $c_1(k_{02} + k_{12})$, A ja B. Nyt tässä on taas neljä yhtälöä, mutta viisi tuntematonta, eikä kaikkien parametrien estimointi onnistu. Kuitenkin, jos c_1 tunnetaan, niin neljästä yhtälöstä voidaan identifioida loput siirtoparametrit k_{ij}.

d) Tämä kohta menee kuten edellinen. Nyt $U_1(s) = 1$ ja $U_2(s) = \frac{1}{s}$, eli saadaan

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{c_1(s + k_{02} + k_{12} + k_{12}\frac{1}{s})}{s^2 + As + B} \\ &= \frac{c_1(s^2 + k_{02}s + k_{12}s + k_{12})}{s^3 + As^2 + Bs}. \end{aligned}$$

Siten vasteesta saadaan vakiot c_1, $c_1(k_{02} + k_{12})$, c_1k_{12}, A ja B. Siten meillä on viisi yhtälöä ja kaikki parametrit saadaan estimoitua.

Sisäänmenon valinta vaikuttaa siis oleellisesti siihen, saadaanko mallin parametrit estimoitua!

2. Nyt olkoon $u(t) = 1$, kun $t \geq 1$ ja $u(t) = 0$ kun $t < 1$.

   a) Merkitään $\theta = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}^T$ ja $\phi(t) = \begin{bmatrix} u(t-1) & u(t-2) \end{bmatrix}^T$, jolloin tarkasteltava systeemi on muotoa

   $$y(t) = \theta^T \phi(t) + v(t).$$

   Tälle PNS-estimaatit saadaan kaavasta:

   $$\begin{aligned}
   \hat{\theta}_N &= (\phi^T\phi)^{-1}\phi^T y(t) \\
   &= \begin{bmatrix} \sum u(t-1)^2 & \sum u(t-1)u(t-2) \\ \sum u(t-1)u(t-2) & \sum u(t-2)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^N u(t-1)y(t) \\ \sum_{t=1}^N u(t-2)y(t) \end{bmatrix} \\
   &= \begin{bmatrix} N-1 & N-2 \\ N-2 & N-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=2}^N y(t) \\ \sum_{t=3}^N y(t) \end{bmatrix} \\
   &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + \frac{1}{N-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{t=2}^N y(t) \\ \sum_{t=3}^N y(t) \end{bmatrix} \\
   &= \begin{bmatrix} \sum_{t=2}^N y(t) - \sum_{t=3}^N y(t) \\ -\sum_{t=2}^N y(t) + \sum_{t=3}^N y(t) + \frac{1}{N-2}\sum_{t=3}^N y(t) \end{bmatrix} \\
   &= \begin{bmatrix} y(2) \\ -y(2) + \frac{1}{N-2}\sum_{t=3}^N y(t) \end{bmatrix} \\
   &= \begin{bmatrix} b_1 + v(2) \\ b_2 - v(2) + \frac{1}{N-2}\sum_{t=3}^N v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}.
   \end{aligned}$$

   Nyt huomataan, että $\hat{b}_1$ riippuu $v(2)$:sta (ei N:stä). Siten estimaatin tarkkuutta ei voida mielivaltaisesti parantaa kasvattamalla N:ää.
   Kun havaintojen määrä kasvaa rajatta, ei $(\phi^T\phi)$ suppene. PNS-estimaatin kaava voidaan kuitenkin kirjoittaa muodossa

   $$\hat{\theta}_N = \left(\frac{1}{N}\phi^T\phi\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}\phi^T y(t)\right).$$

   Ongelma on nyt se, että

   $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\phi^T\phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   ei käänny! Perusongelma on, että tässä tapauksessa heräte ei ole tarpeeksi rikas.

   b) Nyt oletetaan, että $b_2 = 0$. Tällöin saadaan

   $$\begin{aligned}
   \hat{\theta} = \hat{b}_1 &= \left(\frac{1}{N}\sum u(t-1)^2\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum u(t-1)y(t)\right) \\
   &= \frac{1}{N-1}\sum y(t) = \frac{1}{N-1}\sum(b_1 u(t-1) + v(t)) \\
   &= b_1 + \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^N v(t).
   \end{aligned}$$

Koska oletettiin, että v on nollakeskiarvoinen, pätee

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} v(t) = 0,$$

joten $\hat{b}_1 \to b_1$.

c) Nyt

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\phi^T\phi &= \frac{1}{N}\sum \phi(t)\phi(t)^T \\ &= \frac{1}{N}\sum \begin{bmatrix} u(t-1)^2 & u(t-1)u(t-2) & \cdots & u(t-1)u(t-n) \\ u(t-2)u(t-1) & u(t-2)^2 & \cdots & u(t-2)u(t-n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(t-n)u(t-1) & u(t-n)u(t-2) & \cdots & u(t-n)^2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ehto, joka vaaditaan parametrien estimoimiseksi on, että $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\phi^T\phi$ kääntyy.

3. a) PRBS on *deterministinen diskreetti signaali*, joka on taajussisällöltään "rikas", ja se muistuttaa valkoista kohinaa. Se määritellään seuraavasti. N:n mittainen PRBS sekvenssi on pulssijono, joka sisältää

$$\begin{array}{rll} \frac{1}{2}\frac{N+1}{2} & \text{kappaletta pulsseja joiden kesto on} & h \\ \frac{1}{4}\frac{N+1}{2} & \text{kappaletta pulsseja joiden kesto on} & 2h \\ \frac{1}{8}\frac{N+1}{2} & \text{kappaletta pulsseja joiden kesto on} & 3h \\ \vdots & & \vdots \\ 4 & \text{kappaletta pulsseja joiden kesto on} & (n-2)h \\ 2 & \text{kappaletta pulsseja joiden kesto on} & (n-1)h \\ 1 & \text{kappaletta pulsseja joiden kesto on} & nh. \end{array}$$

Matlab-skripti las10t3ab.m muodostaa tällaisen signaalin.

b) las10t3ab.m laskee tämänkin.

c) Matlab-skripti las10t3c.m.

4. Tarkastellaan tiedoston las10t4.mat dataa.

a) Sovitetaan dataan ARX-malli

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t).$$

Havaitaan, että sovitus on varsin huono. Tämä johtuu siitä, että ARX-malli on muotoa

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}u(t) + \frac{1}{A(q)}e(t),$$

eli kyseessä on oleellisesti häiriömalli $H(q;\theta) = \frac{1}{A(q)}$. Taajuustasossa tämä häiriöön liittyvä suodin on muotoa $\frac{1}{A(e^{i\omega})}$, joten se vahvistaa korkeita taajuuksia. Siten korkeataajuiset häiriöt aiheuttavat ongelmia mallin sovituksessa. Kaistapäästöesisuodatuksella kompensoida tätä efektiä.

b) Kaistapäästösuodatuksessa vahvistetaan kiinnostavia taajuuksia. Eräs tapa on ensin sovittaa dataan ARX-malli

$$\hat{A}(q)y(t) = \hat{B}(q)u(t) + e(t),$$

ja suodattaa sisäänmeno ja ulostulo suotimen $\frac{1}{\hat{A}(q)}$ läpi (esisuodatus):

$$y_F(t) = \frac{1}{\hat{A}(q)}y(t), \; u_F(t) = \frac{1}{\hat{A}(q)}u(t).$$

Nyt voidaan konstruoida ARX-malli suodatetuille signaaleille:

$$A(q)y_F(t) = B(q)u_F(t) + e(t).$$

Katso Matlab-skripti las10t4.m.