Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-E2129 Systeemien identifiointi

11. harjoituksen ratkaisut

1. a) Mallin kertaluvun valinnassa voidaan käyttää apuna informaatiokriteerejä. Ne voidaan yksinkertaisimmillaan mieltää minimoitavina funktioina, jotka sisältävät sovitetun mallin neliövirheen ja lisäksi mallin parametrien määrästä riippuvan sakkotermin. Merkitään estimoitavaa parametrivektoria θ:lla. Informaatiokriteerit ovat yleensä muotoa

$$f(d, N)\varepsilon^T\varepsilon,$$

missä d on estimoitavien parametrien määrä, N havaintojen määrää ja ε sovitteen residuaalit. Tällöin voidaan valita parametrit ja sovitettavan mallin kertaluku

(i) Akaiken informaatiokriteerillä (AIC):

$$\min_{\theta,d} \left(1 + \frac{2d}{N}\right) \varepsilon^T\varepsilon$$

(ii) Ennustevirhekriteeri (FPE):

$$\min_{\theta,d} \frac{1 + \frac{d}{N}}{1 - \frac{d}{N}} \frac{1}{N}\varepsilon^T\varepsilon$$

(iii) Rissasen minimipituus:

$$\min_{\theta,d} \left(1 + \frac{2d}{N} \log N\right) \varepsilon^T\varepsilon$$

Tarkastellaan nyt eri malleilla informaatiokriteerin arvoja. Tehtävään liittyvä data on tiedostossa las11t1data.m. Informaatiokriteerien arvot lasketaan Matlab-funktiolla las11t1a.m.

b) Luonnollisesti ottamalla lisää parametreja malliin saadaan neliövirhe pienemmäksi. F-testissä idena on arvioida neliövirheen pienenemisen merkitsevyyttä tilastollisesti.

Olkoot mallirakenteiden neliövirheet V_N^1 ja V_N^2. Nyt olettaen, että virhetermit ovat valkoista kohinaa on suure

$$x = N\frac{V_N^1 - V_N^2}{V_N^2}$$

appriksimatiivisesti χ^2-jakautunut vapausastein $d_2 - d_1$, jos N on riittävän suuri. Nyt luottamustasolla α neliövirheen pieneneminen ei ole tilastollisesti merkitsevää, jos $x \leq \chi^2_\alpha(d_2 - d_1)$. Tavallisesti käytetään $\chi^2_\alpha(1) = 2$.

Lopuissa tehtävissä sovelletaan pääosin jo aiemmin opittua, ja keskitytään identifiointiprosessiin kokonaisvaltaisesti.

Otetaan hiukan muistin virkistystä: Ristikovarianssi x:n ja y:n välillä määritellään seuraavasti:

$$R_{xy}(t) = E[x(\tau)y(\tau + t)],$$

ja jos $x = y$ niin puhutaan autokovarianssista.

Ristikovarianssi voidaan estimoida datasta kaavasta:

$$\hat{R}_{xy} = \frac{1}{N} \sum x(\tau)y(\tau + t)$$

Valkoinen kohinahan on korreloimatonta. Siten, jos $e(t)$ on valkoista kohinaa, niin

$$R_{ex}(t) = \begin{cases} \sigma_{ex}^2, & \text{kun } t = 0; \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

missä σ_{ex}^2 on $e(t)$:n ja $x(t)$:n välinen kovarianssi. Erityisesti, jos $x = e$ niin σ_{ee}^2 on kohinan varianssi.

Autokorrelaatio määritellään seuraavasti:

$$r_{xy}(t) = \frac{R_{xy}(t)}{\sqrt{R_{xx}(0)R_{yy}(0)}}.$$

Systeemin taajuusvastetta voidaan tarkastella Boden diagrammilla, jossa piirretään systeemin vahvistus ja vaihesiirto

$$|G(i\omega)| \text{ ja } \arg G(i\omega)$$

taajuuden ω funktiona yleensä logaritmiselle asteikolle.

2. Tässä tehtävässä voi käyttää apuna Matlabin System Identification Toolboxia. Mallipohja löytyy laskuharjoituksiin liittyvistä tiedostoista nimellä las11t2.sid. Vaihtoehtoisesti voi käyttää tiedostoa LH11T2.m.

   a)-b) Sovitetaan ensin malli, jonka jälkeen voidaan estimoida $\hat{R}_{ee}$ ja $\hat{R}_{eu}$.

   Tilastollisin menetelmin voidaan testata poikkeaako kovarianssi merkitsevästi nollasta. Olettaen, että residuaalit ovat valkoista kohinaa on autokorrelaatio approksimatiivisesti $(0, \frac{1}{N})$-normaalijakautunut ja siten autokorrelaation 95%luottamusvälin leveydeksi saadaan

$$\pm\frac{1.96}{\sqrt{N}}.$$

   Jos siis estimoitu autokorrelaatio $|r_{ee}(t)| \leq \frac{1.96}{\sqrt{N}}$ niin se ei poikkea tilastollisesti nollasta.

   Toinen, tarkempi, tapa on käyttää testisuuretta

$$Q = N \sum_{t=1}^{K} r_{ee}^2(t) \sim \chi^2(K),$$

   todistus sivuutetaan tässäkin tapauksessa.

c) Nyt jos resuduaalit ovat valkoista kohinaa on $\hat{\theta} \sim N(\theta, \frac{\lambda^2}{N}(\phi^T\phi)^{-1})$, jolloin parametriestimaateille voidaan hakea haluttu luottamusväli normaalijakaumasta.

d) Piirretään $|G(i\omega)|$ ja $\arg G(i\omega)$.

3. Tässä tehtävässä oletetaan, että tarkasteltava systeemi on muotoa

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - \cdots - a_n y(t-n) + b_1 u(t-1) + \cdots + b_n u(t-n),$$

eli huomaa, että $n = n_a = n_b$. Ratkaisussa kannattaa hyödyntää MATLAB-tiedostoa LH11T3.m, joka puolestaan kutsuu muita funktioita.

a) Hankel matriisitekniikassa ideana on käyttää hyväksi tietoa, että systeemin impulssivaste $h(t)$ riippuu lineaarisesti n:stä edellisestä arvosta $h(t-1), \ldots, h(t-n)$, eli

$$h(t) = \sum_{j=1}^{n} a(j) h(t-j)$$

Siten Hankel-matriisin

$$H(l,k) = \begin{bmatrix} h(k) & h(k+1) & \ldots & h(k+l-1) \\ h(k+1) & h(k+2) & \ldots & h(k+l) \\ \vdots & \ldots & & \vdots \\ h(k+l-1) & \ldots & & h(k+2l-2) \end{bmatrix}$$

rangi $H(l,k) = n$, kun $l \geq n$. Silloin $\det H(l,k) = 0$ kun $l > n$.
Käytännössä on siis testattava millä l:n arvoilla $\det H(l,k) = 0$. Lisäksi on tapana keskiarvottaa $H(l,k)$ k:n yli, eli tarkastella matriisin $H(l) = \frac{1}{N}\sum_k H(l,k)$ determinanttia, joka on kohinaa, kun $l \geq n$. Haetaan siis suurin l, jolla $\det H(l) \not\approx 0$.
Impulssivaste voidaan estimoida käyttäen Wiener-Hopf yhtälöä (vertaa lh 7/3), jonka avulla saadaan:

$$h(i) = \frac{R_{uy}(i)}{R_{uu}(0)}.$$

Käytä tiedostoja imp.m ja hank.m.

b) Tulomomenttimatriisitarkastelussa oletetaan, että heräte u on jatkuvasti herättävä kertalukua vähintään $n+1$.
Tutkitaan matriisia

$$U(l) = \begin{bmatrix} y(l) & \ldots & y(1) & \vdots & u(l) & \ldots & u(1) \\ y(l+1) & \ldots & y(2) & \vdots & u(l+1) & \ldots & u(2) \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ y(N) & & y(N-l+1) & \vdots & u(N) & \ldots & u(N-l+1) \end{bmatrix}$$

jolloin u-sarakkeet ovat jatkuvasti herättävyysoletuksen nojalla lineaarisesti riippumattomia, kun $l \leq n+1$. Nyt haetaan suurin l^*, jolle $U(l^*)$ on täyttä rankkia, jolloin $n = l^*$. Jos $U(l)$ on rankkia l niin silloin neliömatriisi $A(l) = \frac{1}{N}U^T(l)U(l)$ on myös rankkia l. Siten voidaan ekvivalentisti hakea suurin l s.e. $\det A(l) \neq 0$.
Käytä tiedostoa prodmom.m.

4. Edellisen tehtävän dataan on lisätty kohinaa, jotta estimaatit sisältäisivät epävarmuutta. Ratkaisussa kannattaa hyödyntää MATLAB-tiedostoa LH11T4.m, joka on jaettu kolmeen lohkoon, yksi jokaista osatehtävää varten.

   a) Aloitetaan parametrien kovarianssimatriisin tarkastelulla. Lineaarinen systeemi voidaan tuttuun tapaan kirjoittaa muodossa

   $$y = \theta^T \phi + e,$$

   josta saadaan parametriestimaateiksi

   $$\hat{\theta} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T y,$$

   ja kovarianssimatriisiksi

   $$\mathrm{Cov}[\hat{\theta}] = \frac{\lambda^2}{N} \left(\phi^T \phi\right)^{-1},$$

   missä λ^2 on kohinan varianssi. Kovarianssimatriisin diagonaalilla on parametriestimaattien varianssien estimaatit $\hat{\sigma}_i^2$, joista saadaan parametriestimaattien hajonnat $\hat{\sigma}_i$.

   Mikäli mallin residuaalit $e(t)$ ovat valkoista kohinaa, ovat parametriestimaatit normaalijakautuneita, ja niille voidaan muodostaa 95% luottamusvälit

   $$\hat{\theta}_i \pm 1.96\sigma.$$

   Mikäli 0 kuuluu tähän luottamusväliin, ei parametriestimaatti poikkea tilastollisesti merkitsevästi nollasta, ja sitä ei tulisi ottaa mukaan malliin.

   b) Simuloinnilla viitataan tässä yhteydessä kvalitatiiviseen tarkasteluun, jossa piirretään mittaukset ja mallin antamat tulokset samaan kuvaan. Tämä tarkastelu on itseasiassa syytä suorittaa aina, kun dataan on sovitettu malli.

   c) Tutkimalla mallin residuaaleja saadaan arvokasta tietoa mallin istuvuudesta todellisuuteen. Residuaalien siis pitäisi olla periaatteessa valkoista kohinaa. Kvalitatiivisesti on ensin syytä plotata residuaalit.

   Tämän jälkeen lasketaan autokorrelaatio, jonka siis pitäisi olla

   $$R_{ee}(i) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{kun } i = 0; \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

   Luonnollisesti autokorrelaatio ei mene tarkasti nollaksi kun $t \neq 0$, mutta sen tulisi olla lähellä sitä. 95% luottamusväli on

   $$\pm \frac{1.96}{\sqrt{N}}.$$

   Toinen tapa olisi tutkia testisuuretta

   $$Q = N \sum_{t=1}^{K} \frac{R_{ee}^2(t)}{R_{ee}(0)^2} \sim \chi^2(K).$$