Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-E2129 Systeemien identifiointi
2. harjoitustyö

Paikan ja nopeuden estimointi Kalman-suotimen avulla

GPS-paikantimissa käytetään yleisesti paikannustarkkuuden parantamiseen Kalman-suodinta. Tässä harjoitustyössä pohditaan Kalman-suotimen käyttöä yksiulotteisen paikannuksen apuna.

Lähdetään liikkeelle paikantimen sijoituspaikan (auto, polkupyörä tms.) liikettä kuvaavasta mallista. Tiedetään, että approksimatiivisesti

$$x(t+dt) = x(t) + v(t)dt + 0.5a(t)dt^2$$
$$v(r+dt) = v(t) + a(t)dt.$$

Kiihtyvyys $a(t) = F(t)/m$ riippuu esim. kaasu- tai jarrupolkimen asennosta, jota ei kuitenkaan voida etukäteen arvata. Juju onkin, että mallinnamme tuntemattoman kiihtyvyyden $a(t)$ prosessihäiriönä $e(t)$!
Diskretoiduksi tilayhtälöksi saadaan siis

$$X(t+dt) = AX(t) + e(t),$$

Jossa

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$e(t) = \begin{bmatrix} 0.5\varepsilon(t)dt^2 \\ \varepsilon(t)dt \end{bmatrix}$$

Esim. diskretointivälillä $dt = 1$s tämä esitys on suhteellisen tarkka, vaikka kiihtyvyys ei olisikaan vakio ko. sekunnin aikana. Olemme siis keränneet aikamoisen määrän a priori-tietoa systeemistä!

Paikannin ilmoittaa dt:n välein sijaintinsa mittausyhtälöllä

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) + w(t)$$

(Todellisuudessa nopeutta mitataan GPS:ssä Doppler-ilmiön avulla, mutta unohdetaan se tässä.)

Mietitään seuraavaksi ε:n ja w:n variansseja. GPS kertoo sijaintinsa lisäksi estimoidun paikkavirheen, joka tarkoittaa sen ympyrän sädettä (tässä välin puolikkaan pituutta), jonka sisällä paikka on 95 % tn:llä. Yleensä tämä näyttämä on pienempi kuin 100m.

Tehtävät

1. Anna perustelu ehdotukselle $R_2 = \mathrm{Var}\big(w(t)\big) \approx 2500$.

   Entä sitten prosessihäiriö? Todennäköisesti suurin mahdollinen kiihtyvyys tavallisessa GPS-käytössä saavutetaan autossa. Tehokkaat autot kiihtyvät nollasta sataan n. 8 sekunnissa, jolloin kiihtyvyys olisi luokkaa 3.5 m/s^2. Hidastuvuudet puolestaan voisivat olla luokkaa -1g eli -9.8m/s^2. Oletetaan, että kiihtyvyydet ovat normaalijakautuneita ja itseisarvoltaan pienempiä kuin 9m/s^2 95 % tapauksista.

2. Mitä tällöin saataisiin kovarianssimatriisiksi $R_1 = \mathrm{Cov}(e) = \mathrm{E}(ee^T)$? Ilmoita analyyttinen muoto sekä numeeriset arvot laskemallasi kiihtyvyyden varianssilla ja dt:n arvolla 1.

   Käytetään seuraavassa matriisia $R_1 = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$. Huomaa kuitenkin, että yhdessä jatkotehtävässä tarvitaan R_1:n riippuvuutta dt:stä.

3. Selvitä tehtävänantoon kuuluvan MATLAB-pohjan (kalman.m) toiminta ja täydennä siihen Kalmansuodin ja muut puuttuvat kohdat. Lähteenä voit käyttää luentomuistiinpanoja. Vastauksena koodi täydennettynä ja sopivin kommentein varustettuna. Huom. tehtävä jatkuu alla!

- Kokeile erilaisia kiihtyvyyssekvenssejä ($\sin(\omega t)$, ramppi, tms.) ja tutki, miten suodin toimii.

- Mikä yksinkertaistus kohdassa "todellisuus" on tehty? Miten todellisuutta tulisi oikeasti päivittää, jos kiihtyvyys ei olisi dt:n aikana vakio? Miten yksinkertaistus vaikuttaa suotimen toiminnan arviointiin?

- Vertaa paikkamittausta, todellisuutta ja suotimen antamaa paikkamittausta. Onko parannus oleellinen?

- Vertaa todellisuutta ja suotimen antamia nopeusestimaatteja brute-force estimaattiin $v(t) = \big(y(t) - y(t-dt)\big)/dt$. Miltä näyttää?

- Kokeile eri arvoja diskretointivälille dt. Muista tässä, että myös kovarianssimatriisi R_1 on dt:n funktio ja muokkaa muutos koodiin. Mitä tapahtuu pienemmillä arvoilla, mitä suuremmilla? Voisiko tämän perusteella antaa jotain ohjetta näytteenottovälin valintaan?

- Selvitä kovarianssimatriisin alkuarvon vaikutus tilaestimointiin.

- Terävä teekkari hoksaa nopeasti, että kovarianssimatriisin R_1 alkioiden pienentäminen pienentää suodatetun signaalin vaihtelua. Kokeile mitä tapahtuu, jos R_1:n alkiot ovat pieniä realisoituviin kiihtyvyyksiin nähden. Kannattaako? Selitä tulos intuitiivisesti.

- Tutki Kalman-vahvistuksen kehittymistä ajan funktiona (muuttuja K). Miltä näyttää? Usein suodin toteutetaan steady-state -kovarianssimatriisilla rekursion sijaan. Huomaa samankaltaisuus LQ-säädön takaisinkytkentävahvistuksen ja siihen liittyvän Riccatin yhtälön kanssa!