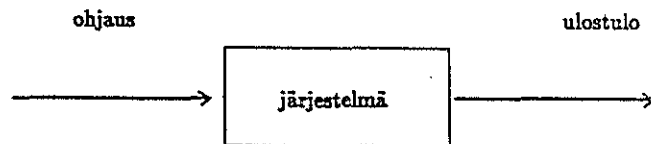


SÄÄTÖTEKNIKKAA

1. JOHDANTO

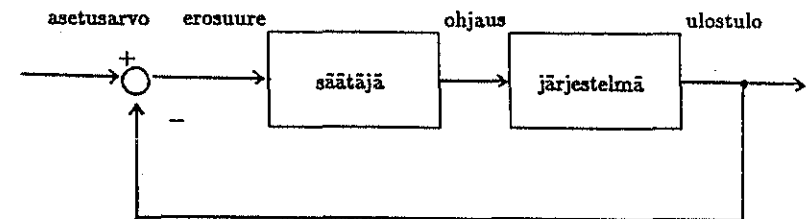
Säätötekniikan perusongelmana on määrätä järjestelmästä tehtävien mitausten perusteella ohjaussignaali siten, että kyseistä ohjausta soveltamalla saavutetaan järjestelmän toiminnalle asetetut tavoitteet. Toiminnallisena tavoitteena on järjestelmän lähtösignaalien tai tilan haluttu käyttäytyminen; joko annetun signaalin seuraaminen (servo-ongelma) tai lähtösignaalin pitäminen vakiona (regulointiongelma).

Avoimella ohjauksella tarkoitetaan sitä, että ohjaus lasketaan ilman lähtösignaaleista tehtäviä mittauksia. Tällöin on järjestelmästä laaditun mallin oltava ehdottoman tarkka, jotta voidaan päätellä ohjaussignaalien vaikutus lähtösignaaleihin. Avointa ohjausta käytettäessä järjestelmään eivät saa vaikuttaa minkäänlaiset ulkoiset ennalta arvaamattomat häiriösignaalit. Kuvassa 1 on esitetty avointa ohjausta käyttävä säätöjärjestelmä, jossa sovellettavat ohjauksen arvot lasketaan järjestelmästä laaditun mallin perusteella siten, että lähtösignaali käyttäytyy halutulla tavalla.



Kuva 1. Avoin ohjaus.

Jos ohjauksen laskemiseen käytetään mittauksista saatavia lähtösignaalien todellisia arvoja, voi järjestelmän malli olla epätarkka, sillä mittauksilla saadun informaation perusteella ohjaus voidaan sopeuttaa järjestelmän todelliseen käyttäytymiseen. Tarkasteltakoon esimerkkinä auton ohjaamista. Avointa ohjausta käytettäessä (ajettaessa silmät kiinni) on tiedettävä, mitä käyrää auto tulee seuraamaan, kun rattia käännetään esimerkiksi 10 astetta. Takaisinkytketyssä tapauksessa (ajettaessa silmät auki) auton käyttäytymisestä tarvitsee tietää vain, että esimerkiksi rattia oikealle käännettäessä auto liikkuu oikealle. Tarkkailemalla auton todellista käyttäytymistä ohjauksen suhteen voidaan auton rata säätää halutuksi ohjauksen hienosäädöllä. Kuvan 2 järjestelmässä säätäjä laskee ohjauksen käyttämällä informaationa asetusarvon ja mittauksen erotusta eli erosuuretta. Ongelmana on valita tehtävään soveltuva säätäjän rakenne. Säätötehtävää vaikeuttavat järjestelmän ulkopuolelta tulevat häiriösignaalit ja mittauksissa esiintyvät häiriöt. Säätö perustuu kuitenkin todellisiin mitattuihin arvoihin, jolloin häiriöitä voidaan kompensoida.



Kuva 2. Takaisinkytketty säätöjärjestelmä

2. DYNAAMISEN JÄRJESTELMÄN KUVAAMINEN

Tarkasteltavat järjestelmät voidaan kuvata systeemyhtälöinä

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

missä $x(t) \in R^n$ on tilavektori ja $u(t) \in R^m$ on ohjausvektori. Järjestelmäyhtälö (1) on käytännössä yleensä epälineaarinen, ja se on linearisoitava, jotta säätöteoriassa kehitettyjä lineaarisille järjestelmille soveltuvia tekniikoita voidaan soveltaa. Olkoon (x_n, u_n) nominaalitrajektori, jonka ympäristössä järjestelmää tarkastellaan. Nominaalitrajektori toteuttaa tilayhtälön (1)

$$\dot{x}_n(t) = f(x_n(t), u_n(t)), \quad x_n(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Olkoon (x, u) ratkaisun poikkeama nominaalitrajektorista, jolloin alkuperäinen ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} x &= x_n + \bar{x} \\ u &= u_n + \bar{u}. \end{aligned} \quad (3)$$

Alkuperäinen ratkaisu (x, u) toteuttaa systeemyhtälön (1), jolloin

$$\dot{x}_n(t) + \dot{\bar{x}}(t) = f(x_n(t) + \bar{x}(t), u_n(t) + \bar{u}(t)), \quad x_n(t_0) + \bar{x}(t_0) = x_0. \quad (4)$$

Kehittämällä yhtälön (4) oikea puoli Taylorin sarjaksi nominaalitrajektorin ympäristössä ottaen huomioon ensimmäisen kertaluvun termit, saadaan

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) + \dot{\bar{x}}(t) &= f(x_n(t), u_n(t)) + f_x(x_n(t), u_n(t))\bar{x}(t) \\ &\quad + f_u(x_n(t), u_n(t))\bar{u}(t) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Nominaalitrajektori toteuttaa yhtälön (2), jolloin yhtälöistä (4) ja (5) saadaan lineaarinen systeemi (\bar{x}, \bar{u}) lle:

$$\dot{\bar{x}}(t) = f_x(x_n(t), u_n(t))\bar{x}(t) + f_u(x_n(t), u_n(t))\bar{u}(t), \quad \bar{x}(t_0) = 0. \quad (6)$$

Nominaalitrajektoriksi valitaan usein stationaariratkaisu (x_s, u_s) , joka toteuttaa yhtälön

$$\dot{x}_s = 0, \quad \text{eli} \quad f(x_s, u_s) = 0, \quad (7)$$

missä siis x_s ja u_s ovat vakioita. Sijoittamalla yhtälöön (3) nominaalitrajektoriksi (x_s, u_s) saadaan poikkeamille (\bar{x}, \bar{u}) aikainvariantti lineaarinen systeemi:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t), \quad \bar{x}(t_0) = 0, \quad (8)$$

missä

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad x = x_s, \quad u = u_s \quad (9a)$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix} \quad x = x_s, \quad u = u_s \quad (9b)$$

Ulostulon $y \in R^p$ (kts. kuvat 1 ja 2) riippuvuutta tilan komponenteista kuvataan lähtöyhtälöllä

$$y(t) = h(x(t)). \quad (10)$$

Määritellään analogisesti yhtälön (3) kanssa

$$y = y_n + \bar{y}, \quad (11)$$

missä y_n on lähtösignaalin nominaalirata ja \bar{y} on poikkeama tästä radasta. Linearisoimalla yhtälö (10) vakioksi oletetun nominaaliradan $y_n = y_s$ ympäristössä saadaan

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t), \quad (12)$$

missä

$$C = h_x(x_s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \frac{\partial h_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad x = x_s \quad (13)$$

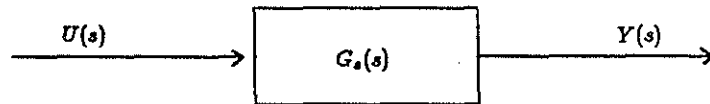
Säätötekniikassa käytetään kahta erilaista lähestymistapaa lineaaristen järjestelmien analysoinnissa: tilayhtälöesitykseen perustuvaa lähestymistapaa

ja niin sanottuja taajuustasomenetelmiä. Tilayhtälöesitykseen perustuvasa lähestymistavassa käytetään järjestelmän linearisoitua tilayhtälömallia (yhtälöt 8 ja 12), kun taas taajuustasomenetelmissä tutkitaan järjestelmän lähtösignaalin käyttäytymistä erilaisilla ohjauksilla (herätteillä) kiinnittämättä huomiota järjestelmän sisäiseen toimintaan. Taajuustasomenetelmissä käytetään järjestelmän siirtofunktioesitystä, jolla tarkoitetaan lähtösignaalin ja vastaavan ohjauksen Laplace esitysten suhdetta, kun alkuarvot oletetaan nolliksi. Olkoon

$$\begin{aligned} U(s) &= L\{u(t)\} \\ Y(s) &= L\{y(t)\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Tällöin järjestelmän siirtofunktio on (kuva 3)

$$G_s(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}. \quad (15)$$



Kuva 3. Järjestelmän siirtofunktioesitys.

Tilayhtälömallista (8) ja (12) voidaan muodostaa siirtofunktio ottamalla ensin Laplace-muunnos systeemyhtälöstä (8):

$$s\bar{X}(s) = A\bar{X}(s) + B\bar{U}(s), \quad (16)$$

missä

$$\begin{aligned} \bar{X}(s) &= L\{x(t)\} \\ \bar{U}(s) &= L\{u(t)\}. \end{aligned}$$

Tällöin

$$(sI - A)\bar{X}(s) = B\bar{U}(s)$$

ja

$$\bar{X}(s) = (sI - A)^{-1}B\bar{U}(s). \quad (17)$$

Lähtöyhtälöistä (12) saadaan edelleen

$$\bar{Y}(s) = C\bar{X}(s), \quad (18)$$

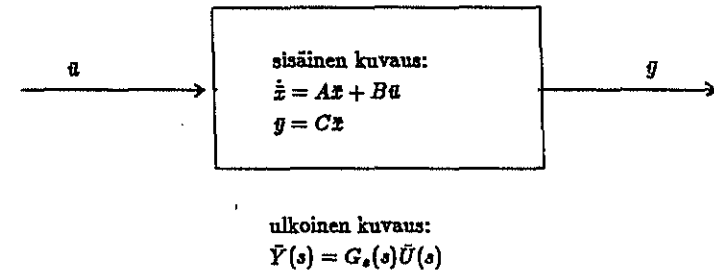
missä $\bar{Y}(s) = L\{y(t)\}$, jolloin yhtälöistä (17)–(18)

$$\bar{Y}(s) = C(sI - A)^{-1}B\bar{U}(s). \quad (19)$$

Järjestelmän siirtofunktio on siis

$$G_s(s) = C(sI - A)^{-1}B. \quad (20)$$

Järjestelmää voidaan nyt kuvata joko sisäisellä kuvauksella tilayhtälösystemillä (8) ja (12) tai ulkoisella kuvauksella siirtofunktiomallilla (19). Kuva 4 havainnollistaa lähestymistapojen eroa.



Kuva 4. Lineaarisen järjestelmän esitystavat.

3. TAAJUUSTASOMENETELMÄT

Seuraavassa tarkastellaan säätöjärjestelmän rakentamista taajuustasomenetelmillä. Ensin tarkastellaan säädettävän kohdejärjestelmän analysoimista, sen jälkeen tarkastellaan takaisinkytkettyä säätöjärjestelmää kokonaisuudessaan ja lopuksi tarkastellaan teollisuudessa eniten käytettyä säätöjärakennetta, PID-säätäjää. Tarkastelun helpottamiseksi oletetaan, että

sekä ohjaussignaaleja että lähtösignaaleja on yksi (SISO-järjestelmä). Yleisemmät useita ohjaus- ja lähtösignaaleja sisältävät säätöjärjestelmät saate- taan yleensä muotoon, jossa tietty ohjauksen komponentti vaikuttaa vain yhteen lähtösignaaliin, jolloin säätäjän konstruointi palautuu yhden lähtö- signaalin säädöksi yhtä ohjaussignaalia käyttäen.

3.1 Kohdejärjestelmän tarkastelu taajuustasossa

Järjestelmän siirtofunktio voidaan esittää muodossa

$$G_s(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad (21)$$

jolloin yhtälöä

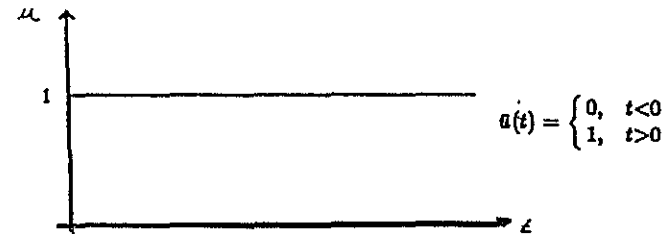
$$\sum_{i=0}^n a_i s^i = 0 \quad (22)$$

kutsutaan järjestelmän *karakteristiseksi yhtälöksi*. Karakteristisen yhtälön juuria tutkimalla voidaan analysoida järjestelmän käyttäytymistä. Järjes- telmän käyttäytymisen kannalta tärkeä ominaisuus on stabiilisuus. Stabiili- luudella tarkoitetaan tässä yhteydessä sitä, että rajoitettu ohjaus tuottaa rajoitetun lähtösignaalin. Karakteristisen yhtälön perusteella järjestelmän stabiilisuus voidaan määrätä seuraavasti:

jos karakteristisen yhtälön kaikkien juurten reaaliosat ovat ei- positiiviset ja lisäksi puhtaasti imaginaariset juuret eivät ole kak- soisjuuria, niin järjestelmä on stabiili.

Stabiilisuuskäsitettä voidaan havainnollistaa olettamalla, että ohjaussignaali on yksikköaskel (kuva 5), jolloin $\bar{U}(s) = \frac{1}{s}$. Lähtösignaalin Laplace-esitys on tällöin

$$\bar{Y}(s) = \frac{1}{s} G_s(s). \quad (23)$$



Kuva 5. Yksikköaskel.

Kirjoitetaan siirtofunktion (21) osoittaja ja nimittäjä tekijämuodossa, jol- loin saadaan

$$G_s(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}. \quad (24)$$

Lähtösignaalin Laplace-esitykseksi saadaan nyt

$$\bar{Y}(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{s \prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad (25)$$

Lähtösignaalin aikafunktio saadaan ottamalla Laplace-käänteismuunnos yh- tälöstä (25). Oletetaan, että n kpl erilaista napaa p_i jakaantuvat siten, että $2k$ kpl niistä on kompleksisia (kompleksikonjugaattipareja, merkitään c_i :llä ja \bar{c}_i :llä) ja loput ovat reaalisia (merkitään r_i :llä). Hajottamalla yhtälön (25) oikea puoli osamurtokehitelemäksi saadaan

$$\bar{Y}(s) = \frac{K_0}{s} + \sum_{i=1}^k \frac{K_i}{(s - c_i)} + \sum_{i=1}^k \frac{\bar{K}_i}{(s - \bar{c}_i)} + \sum_{i=2k+1}^n \frac{K_i}{(s - r_i)}, \quad (26)$$

missä

$$K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{Y}(s)$$

$$K_i = \lim_{s \rightarrow c_i} (s - c_i) \bar{Y}(s), \quad i = 1, \dots, k$$

$$\bar{K}_i = \lim_{s \rightarrow \bar{c}_i} (s - \bar{c}_i) \bar{Y}(s), \quad i = 2k+1, \dots, n$$

ja \bar{K}_i on K_i :n kompleksikonjugaatti ($i = 1, \dots, k$).

Merkitään $c_i = \sigma_i + j\omega_i$, jolloin yhtälön (26) Laplace-käänteismuunnos on

$$\begin{aligned} y(t) &= K_0 + \sum_{i=1}^k K_i e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} + \sum_{i=1}^k \bar{K}_i e^{(\sigma_i - j\omega_i)t} + \sum_{i=2k+1}^n K_i e^{r_i t} \\ &= K_0 + \sum_{i=1}^k |K_i| e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i) + \sum_{i=2k+1}^n K_i e^{r_i t}, \end{aligned} \quad (27)$$

missä ϕ_i on kompleksisen vakion K_i aiheuttama vaihesiirto. Jos karakteristisella yhtälöllä on juuria, jotka toistuvat, yhtälöön (27) tulee mukaan termejä, joissa on t n potenssien ja eksponenttitermien tuloja. Olkoon yhtälön (25) navoista m kpl samoja (merkitään s_i illä). Tällöin yhtälön (26) oikealle puolelle tulee lisätermi

$$C(s) = \sum_{i=1}^m \frac{K_i}{(s - s_i)^i}, \quad (28)$$

missä

$$K_i = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{1}{(m-i)!} \frac{d^{(m-i)}}{ds^{(m-i)}} [(s - s_i)^m C(s)] \quad (29)$$

jolloin

$$c(t) = \sum_{i=1}^m \frac{K_i t^{i-1}}{(i-1)!} e^{-s_i t}. \quad (30)$$

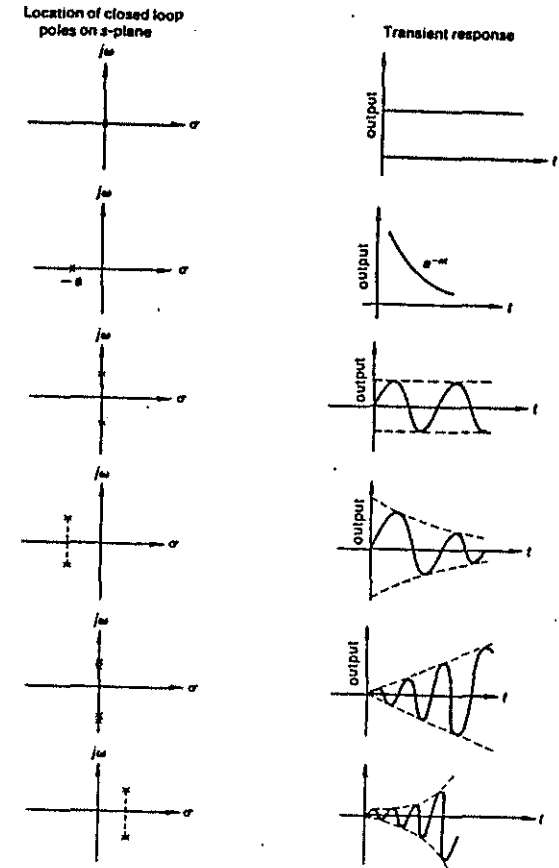
Lähtösignaalin käyttäytymistä voidaan nyt tarkastella yhtälöiden (27) ja (30) avulla.

Jos juuren reaaliosa on positiivinen, vastaava eksponenttiosa kasvaa rajatta t n kasvaessa, ja järjestelmä on siis epästabiili. Epästabiilisuus voi olla eksponentiaalista kasvua (yhtälön 27 oikean puolen viimeinen termi), tai se voi olla kasvavaa sinimuotoista värähtelyä (yhtälön 27 oikean puolen toinen termi). Imaginaariakselilla oleva moninkertainen juuri ilmenee t n potensseihin verrannollisena kasvavana sinimuotoisena värähtelynä (yhtälö 30).

Jos järjestelmän karakteristisen yhtälön kaikkien juurten reaaliosat ovat negatiivisia, järjestelmän käyttäytyminen koostuu eksponentiaalisesti vaimenevista komponenteista ja/tai eksponentiaalisesti vaimenevasta sinimuotoisesta värähtelystä (yhtälö 27). Imaginaariakselilla olevia yksinkertaisia juuria vastaa vakioamplitudinen sinimuotoinen värähtely (yhtälön 27 oikean puolen toinen termi).

Kuvassa 6 on esitetty järjestelmän transientin käyttäytyminen juurten sijainnin funktiona.

Karakteristisen yhtälön (22) juurten sijaintia voidaan tutkia Routh-Hurwitzin menetelmällä, jossa juuria ei tarvitse laskea, vaan karakteristisen yhtälön kertoimista päätellään suoraan oikeassa puolitasossa olevien juurten lukumäärä.



Kuva 6. Transientin käyttäytyminen juurten sijainnin funktiona

Ensimmäisen ja toisen kertaluvun järjestelmät

Monessa tapauksessa korkeamman kertaluvun järjestelmää voidaan approksimoida ensimmäisen tai toisen kertaluvun järjestelmällä, jolloin moni-

mutkaisempienkin systeemien identifiointiseksi ja analysoimiseksi on tärkeää tuntea kyseisten järjestelmien käyttäytyminen. Tarkastellaan seuraavaksi järjestelmien vastetta, kun sisäänmenosignaalina on yksikköaskel.

Ensimmäisen kertaluvun järjestelmä on muotoa

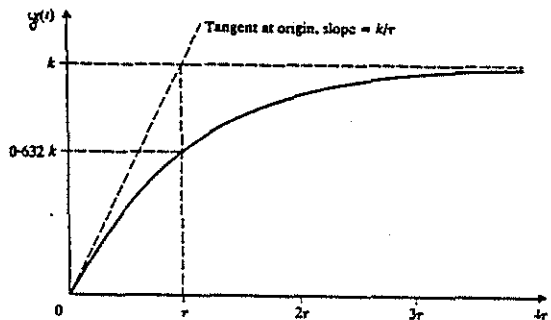
$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t) \quad (31)$$

eli Laplace-muunnattuna

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{\tau s + 1} \quad (32)$$

Järjestelmän askelvaste on tällöin (kuva 7)

$$y(t) = k(1 - e^{-t/\tau}). \quad (33)$$



Kuva 7. Ensimmäisen kertaluvun järjestelmän askelvaste.

Toisen kertaluvun järjestelmä voidaan esittää muodossa

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t), \quad (34)$$

missä ζ on vaimennuskerroin ja ω_n on järjestelmän luonnollinen kulmataajuus. Laplace-muunnattu järjestelmä on tällöin

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (35)$$

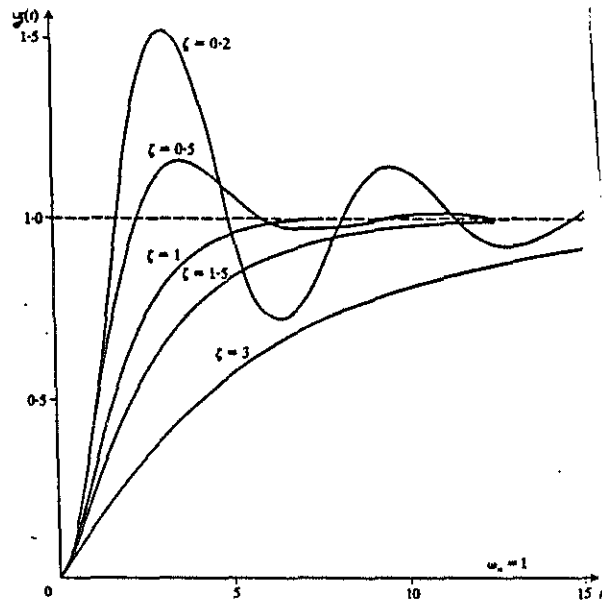
Vasteen luonne riippuu vaimennuskertoimesta ζ , joka määrää vasteessa olevan värähtelyn. Pienillä ζ in arvoilla, $\zeta \in (0,1)$, järjestelmä värähtelee häiriöiden vaikutuksesta ja sitä kutsutaan alivaimennetuksi. Arvolla $\zeta = 1$ järjestelmä on kriittisesti vaimennettu. Arvoilla $\zeta > 1$ järjestelmä on ylivaimennettu, eikä sen vasteessa esiinny värähtelyä. Järjestelmän askelvaste eri ζ in arvoilla on:

	$y(t)$
$\zeta = 0$	$1 - \cos \omega_n t$
$\zeta \in (0,1)$	$1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right),$ missä $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n$
$\zeta = 1$	$1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)$
$\zeta > 1$	$1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \left\{ \frac{\exp[-(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t]}{\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}} - \frac{\exp[-(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t]}{\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}} \right\}$

Kuvassa 8 on piirretty askelvasteita eri ζ in arvoilla. Järjestelmän käyttäytymisen kuvaamiseksi vasteelle määritellään seuraavat ominaisuudet (kuva 9):

Nousuaika on aika, jonka kuluessa vaste ensimmäisen kerran saavuttaa lopullisen tasapainotilan:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(\frac{-\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right).$$



Kuva 8. Toisen kertaluvun järjestelmän askelvaste erilaisilla vaimennuskertoimen arvoilla

Ylilyönti määritellään vasteen suurimman tasapainotilan ylityksen suhteena tasapainotilaan ja se ilmoitetaan usein prosenteissa. Alivaimennettun järjestelmän vasteesta saadaan huipun aika

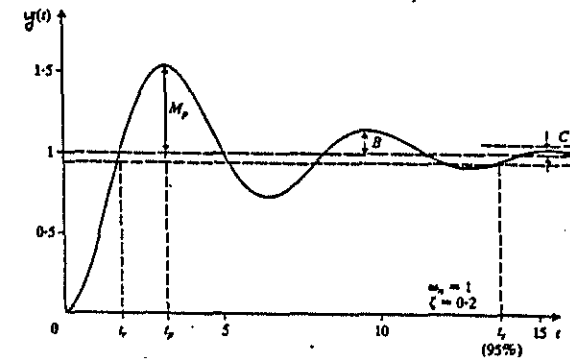
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d},$$

ja ylilyönniksi saadaan

$$M_p = \exp\left[-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right].$$

Vaimennussuhde on kahden perättäisen tasapainotilan ylityksen suhde

$$\frac{B}{M_p} = \frac{C}{B} = \dots = \exp\left[\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right].$$

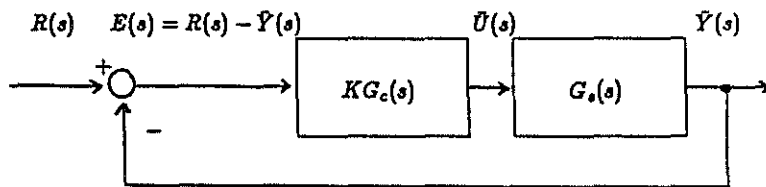


Kuva 9. Askelvasteen ominaisuudet (toisen kertaluvun alivaimennettu järjestelmä).

Asettumisaika t_s määritellään aikana, jonka kuluessa vaste pysyy annetulla etäisyydellä tasapainoarvosta.

3.2 Säättöjärjestelmän analysointi

Edellisessä kappaleessa on tarkasteltu kohdejärjestelmän lähtösignaalin käyttäytymistä askelmuotoisella herätteellä. Säättöjärjestelmä koostuu kuvan 2 osoittamalla tavalla kohdejärjestelmästä, säätäjistä ja lähtösignaalin takaisinkytkennästä. Säättöjärjestelmää analysoidessa on tarkasteltava järjestelmää kokonaisuutena, ja taajuustasomenetelmissä otetaan tarkastelun kohteeksi tällöin asetusarvon r ja lähtösignaalin y välinen riippuvuus. Olkoon säätäjän siirtofunktio $KG_c(s)$, missä K on vahvistusparametri. Säättöjärjestelmälle saadaan tällöin lohkokaavioesitys:



Lohkokaaviosityksestä voidaan johtaa asetusarvon ja lähtösignaalin välinen siirtofunktio seuraavasti:

$$\begin{aligned} \bar{Y}(s) &= G_s(s)\bar{U}(s) = G_s(s)KG_c(s)E(s) = G_s(s)KG_c(s)[R(s) - \bar{Y}(s)] \\ \Rightarrow [1 + KG_s(s)G_c(s)]\bar{Y}(s) &= KG_s(s)G_c(s)R(s) \\ \Rightarrow G(s) = \frac{\bar{Y}(s)}{R(s)} &= \frac{KG_s(s)G_c(s)}{1 + KG_s(s)G_c(s)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Takaisinkytketyn järjestelmän stabiilisuuden määräävät $G(s)$:n navat, eli yhtälön

$$1 + KG_s(s)G_c(s) = 0 \quad (37)$$

juuret.

Taajuustasossa tapahtuvaan säätöjärjestelmän suunnitteluun ja analysointiin käytettäviä tekniikoita ovat juuriuramenetelmä, Nyquistin menetelmä ja Boden diagrammi.

Juuriuramenetelmä

Juuriuramenetelmässä tarkastellaan säätäjän vahvistusparametrin K vaikutusta järjestelmän ominaisuuksiin piirtämällä kompleksitasoon karakteristisen yhtälön (37) juuret K :n funktiona, kun K saa arvot $K \in [0, \infty]$. Juuria ei yleensä lasketa tarkasti, vaan yksikertaisten sääntöjen avulla määrätään juurten sijainti karkeasti.

Yhtälön (37) perusteella voidaan karakteristiselle yhtälölle kirjoittaa *itseisarvoehto*

$$|KG_s(s)G_c(s)| = 1 \quad (38)$$

ja *kulmaehto*

$$\arg\{G_s(s)G_c(s)\} = (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (39)$$

Vahvistus K ei vaikuta kulmaehtoon, sillä se on reaalinen. Kirjoitetaan yhdistetty siirtofunktio $G_s(s)G_c(s)$ muodossa

$$G_s(s)G_c(s) = \frac{\prod_z (s - z_z)}{\prod_p (s - p_p)},$$

jolloin itseisarvo- ja kulmaehdoista saadaan

$$\begin{aligned} K &= \frac{|s - p_1| |s - p_2| \dots |s - p_p|}{|s - z_1| |s - z_2| \dots |s - z_z|} \\ \arg\{s - z_1\} + \arg\{s - z_2\} + \dots + \arg\{s - z_z\} - \\ &\quad \arg\{s - p_1\} - \arg\{s - p_2\} - \dots - \arg\{s - p_p\} = (2k+1)\pi. \end{aligned} \quad (40)$$

Itseisarvoehdosta saadaan nyt seuraavat säännöt:

1. Juuriurat alkavat avoimen järjestelmän $G_c(s)G_s(s)$ navoista, jotka vastaavat arvoa $K = 0$. Juuriuria on siis yhtä monta kuin avoimen järjestelmän napoja.
2. Juuriurat päättyvät avoimen järjestelmän nollakohtiin, jotka vastaavat siis tilannetta $K = \infty$. Juuriurista z kpl alkaa navoista ja päättyy nollakohtiin, ja loput $p - z$ kpl alkavat navoista ja jatkuvat kompleksitasossa äärettömyyteen lähestyen asymptootteja, kun $s \rightarrow \infty$.
3. Juuriurat ovat symmetrisiä reaaliakselin suhteen, sillä karakteristisen yhtälön juuret ovat joko reaalisia tai kompleksikonjugattipareja.

Kulmaehtojen avulla voidaan tutkia asymptoottien käyttäytymistä. Kirjoitetaan $G_s(s)G_c(s)$ muodossa

$$G_s(s)G_c(s) = \frac{s^x + a_1 s^{x-1} + \dots}{s^p + b_1 s^{p-1} + \dots} = s^{x-p} + (a_1 - b_1)s^{x-p-1} + \dots \quad (41)$$

Yhtälön (41) oikean puolen kaksi ensimmäistä termiä ovat samat kuin potenssilausekkeella

$$\left(s + \frac{a_1 - b_1}{x - p}\right)^{x-p} = s^{x-p} + (a_1 - b_1)s^{x-p-1} + \dots$$

jolloin suurilla s -n arvoilla voidaan $G_s(s)G_c(s)$:ää arvioida potenssilausekkeella

$$G_s(s)G_c(s) = \left(s + \frac{a_1 - b_1}{z - p}\right)^{s-p} \quad (42)$$

Kulmaehdosta (39) saadaan nyt

$$\arg\{G_s(s)G_c(s)\} = \arg\left(s + \frac{a_1 - b_1}{z - p}\right)^{s-p} = (2k+1)\pi$$

eli

$$\arg\left(s + \frac{a_1 - b_1}{z - p}\right) = \frac{\pi}{z - p} + 2k \frac{\pi}{z - p}. \quad (43)$$

Yhtälön (43) mukaan kompleksitason vektori reaaliakselin pisteestä $-(a_1 - b_1)/(z - p)$ asymptootin pisteeseen s muodostaa reaaliakselin kanssa vakio- kulman.

Asymptootit ovat siis suoria, jotka leikkaavat reaaliakselin pisteessä

$$-\frac{a_1 - b_1}{z - p} \quad (44)$$

ja niiden suunnat ovat

$$\frac{\pi}{z - p} + 2k \frac{\pi}{z - p}, \quad k = 0, 1, \dots, (z - p - 1). \quad (45)$$

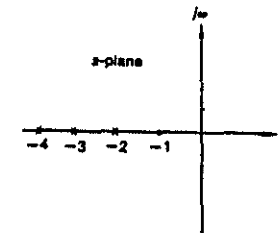
Koska $a_1 = -z_1 - z_2 - \dots - z_s$ ja $b_1 = -p_1 - p_2 - \dots - p_p$, niin reaaliakselin leikkauspiste voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\frac{1}{z - p} [(z_1 + z_2 + \dots + z_s) - (p_1 + p_2 + \dots + p_p)]. \quad (46)$$

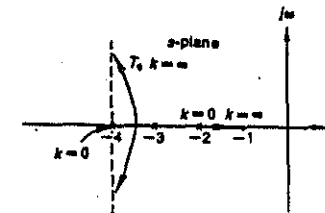
Kulmaehdon (40) perusteella voidaan päätellä myös ne reaaliakselin osat, jotka kuuluvat juuriuraan. Oletetaan aluksi, että sekä navat että nollakohdat ovat reaalisia. Termit $\arg\{s - z_i\}$ ovat tällöin nollia, jos $z_i < s$, ja ne saavat arvon π , jos $z_i > s$. Vastaava pätee termeille $\arg\{s - p_i\}$. Jos napoja tai nollakohtia esiintyy kompleksisina liittolukuina, niiden vaikutus kumoaa toisensa kulmaehdossa (40). Kulmaehdosta saadaan nyt

$$\nu\pi = (2k+1)\pi, \quad (47)$$

missä ν on pisteen s oikealla puolella olevien juuriuran alku- ja loppupisteiden määrä. Jotta yhtälö (47) totentuu, on ν oltava pariton. Tällöin siis



(a) Pole-zero configuration



(b) Root locus

Kuva 10. Esimerkijärjestelmän juuriura.

juuriuraan kuuluvat ne reaaliakselin osat, joiden oikealla puolella olevien alku- ja loppupisteiden määrä on pariton.

Esimerkki. Tarkastellaan järjestelmää, jonka avoimen silmukan siirtokuntio on

$$KG_s(s)G_c(s) = \frac{K(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}.$$

Navat ja nollakohdat on esitetty kuvassa 10a. Yllä olevien sääntöjen perusteella voidaan päätellä, että

1. Juuriuria on kolme ja ne alkavat pisteistä -2, -3 ja -4.
2. Yksi haara päättyy pisteeseen -1.
3. Juuriurat ovat symmetrisiä reaaliakselin suhteen.
4. Asymptootit leikkaavat reaaliakselin pisteessä $(-1 + 2 + 3 + 4)/(1 - 3) = -4$ ja niiden reaaliakselin kanssa muodostamat kulmat ovat $(2k+1)\pi/(z-p) = \pm \frac{\pi}{2}$.
5. Juuriuraan kuuluvat reaaliakselista välit $[-4, -3]$ ja $[-2, -1]$.

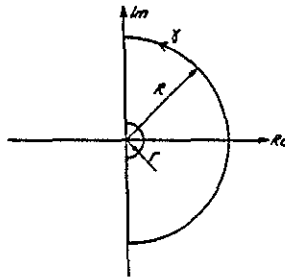
Juuriura on esitetty kuvassa 10b.

Nyquistin menetelmä

Nyquistin menetelmässä käytetään hyväksi funktioteoriasta tuttua argumentin periaatetta tutkittaessa karakteristisen yhtälön (37) oikeassa puolitasossa olevien juurten lukumäärää. Olkoon γ suljettu käyrä ja olkoon N ja P vastaavasti kompleksiarvoisen funktion $F(s) = 1 + KG_s(s)G_c(s)$ nollapisteiden ja napojen lukumäärä käyrän γ sisäpuolella. Argumentin periaate on tällöin:

kun s kulkee positiiviseen suuntaan umpinaisen käyrän γ , niin $F(s)$ kiertää F -kompleksitasossa origon ympäri positiiviseen suuntaan $N - P$ kertaa.

Tutkittaessa $F(s)$:n nollakohtien lukumäärää oikeassa puolitasossa valitaan suljettu käyrä γ seuraavasti:



Kun $r \rightarrow 0$ ja $R \rightarrow \infty$, käyrä γ peittää koko oikean puolitason. Pienen puoliympyrän lisääminen origoon johtuu siitä, että usein $G_s(s)G_c(s)$ sisältää puhdasta integrointia, jolloin sillä on origossa napoja. Kun s kiertää käyrän γ , niin $KG_s(s)G_c(s)$ kiertää kompleksitasossa käyrän Γ . Tavallisesti oletetaan, että $KG_s(s)G_c(s)$:llä ei ole napoja oikeassa puolitasossa, jolloin Nyquistin kriteeri voidaan kirjoittaa muodossa:

takaisinrytketty järjestelmä on asympotoottisesti stabiili, silloin ja vain silloin kun käyrä Γ ei sulje sisäänsä pistettä -1 (ja $KG_s(s)G_c(s)$:llä ei ole napoja oikeassa puolitasossa).

Esimerkki. Olkoon

$$G(s) = KG_s(s)G_c(s) = \frac{K}{s(s+1)}.$$

Tarkastellaan ensin imaginaariakselin pisteitä $s = j\omega$, $\omega \in [r, R]$:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(1+j\omega)} \\ &= -\frac{K}{1+\omega^2} - j\frac{K}{\omega(1+\omega^2)}. \end{aligned}$$

$G(j\omega)$:n reaali- ja imaginaariosat ovat siis negatiivisia, jolloin $\arg\{G(j\omega)\} = \arctan(\frac{1}{\omega}) \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$. Kun ω on pieni, vaihekulma on likimäärin $-\frac{\pi}{2}$, ja $G(j\omega)$:n itseisarvo lähestyy ääretöntä. Kun ω on suuri, vaihekulma on likimäärin $-\pi$, ja itseisarvo lähestyy nollaa. Negatiivisia ω :n arvoja vastaava käyrä saadaan edellä kuvatus käyrän peilikuvana reaaliakselin suhteen.

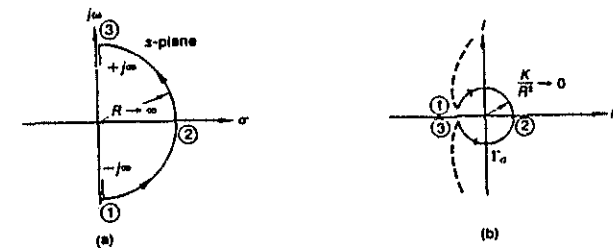
Suuremman R -säteisen puoliympyrän analysoimiseksi asetetaan

$$s = Re^{j\theta},$$

missä θ saa arvot $-\frac{\pi}{2}$:sta $\frac{\pi}{2}$:een. Kun R on suuri, saadaan

$$G(Re^{j\theta}) \approx \frac{K}{R^2} e^{-j2\theta}.$$

Kulman θ saadessa kaikki arvot $-\frac{\pi}{2}$:sta $\frac{\pi}{2}$:een $G(s)$:n vaihekulma saa arvot π :stä $-\pi$:hin ja sen itseisarvo lähestyy nollaa, kun $R \rightarrow \infty$. Kuvaajaksi saadaan



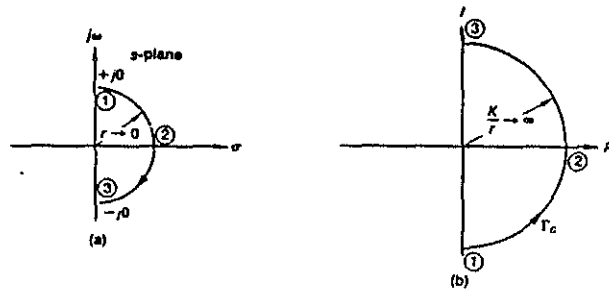
Lopuksi on vielä tarkasteltava r -säteen pienempi puoliympyrä. Kirjoitetaan

$$s = re^{j\theta}$$

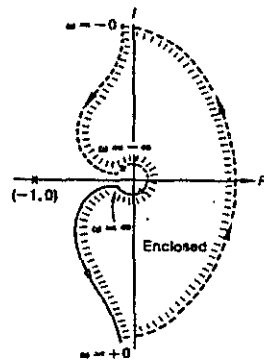
missä θ saa arvot $\frac{\pi}{2}$:sta $-\frac{\pi}{2}$:een. Pienillä r :n arvoilla

$$G(re^{j\theta}) = \frac{K}{r} e^{-j\theta},$$

jolloin θ :n vaihdelta $\frac{\pi}{2}$:sta $-\frac{\pi}{2}$:een pieni puoliympyrä kuvautuu suureksi puoliympyräksi (säde K/r), jonka kiertosuunta on alkuperäiselle puoliympyrälle vastakkainen. Kuvajaksi saadaan



Kokoamalla saadut tulokset yhteen voidaan piirtää järjestelmän Nyquistin diagrammi:



Kuvasta nähdään, että pistettä $(-1, 0)$ ei kierretä. Koska $N = 0$ ja $P = 0$, systeemi on stabiili.

Kuvassa 11 on esitetty esimerkkejä Nyquistin diagrammeista.

$G(s)H(s)$	Nyquist Plot (Polar plots)	Stability
$\frac{K}{s+c}$		Stable for all gain.
$\frac{K}{s(s+a)}$		Stable for all gain.
$\frac{K}{(s+a)(s+b)}$		Stable for all gain.
$\frac{K}{s(s+a)(s+b)}$		Unstable as shown. May become stable if gain is decreased.
$\frac{K(s+c)}{s^2(s+a)(s+b)}$		Stable as shown. Becomes unstable as K is increased.
$\frac{K(s+a)(s+b)}{s^2}$		Conditionally stable. Becomes unstable as K is decreased.

Kuva 11. Erilaisten järjestelmien Nyquistin diagrammeja.

Boden diagrammi

Linearisille järjestelmille on voimassa *superpositioperiaate*, jonka mukaan sisäänmenosignaali-joukon lineaarikombinaation aikaansaama kokonaisvaste voidaan määrätä samana lineaarikombinaationa vastaavista yksittäisistä signaalien vasteista. Jos siis löydetään sellainen sisäänmenosignaalien kanta, että kaikki tarkasteltavat sisäänmenosignaalit ovat ilmaistavissa lineaarikombinaationa kantaan kuuluvista funktioista, niin tiettyä sisäänmenosignaalia vastaava vaste voidaan määrätä kantafunktioiden vasteiden avulla. Paljon käytetty kantafunktiojoukko on trigonometriset funktiot, jolloin Fourier-muunnoksella sisäänmenosignaalit voidaan kirjoittaa eri taajuuksien sini- ja kosinifunktioiden summina. Seuraavassa tarkastellaankin lineaarisen järjestelmän vastetta, kun sisäänmenosignaalinä on sini- tai kosinifunktio.

Olkoon avoimen järjestelmän siirtofunktio $G(s)$ (kaava 24) ja olkoon sisäänmenosignaalinä

$$u(t) = \sin \omega t, \quad (48)$$

jolloin

$$U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (49)$$

Vasteen Laplace-muunnos on tällöin

$$Y(s) = G(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (50)$$

Kirjoitetaan yhtälön (50) osamurtokehitelemä kahdessa osassa seuraavasti (vrt. yhtälö 26)

$$Y_1(s) = \sum_{i=1}^k \frac{K_i}{(s - c_i)} + \sum_{i=1}^k \frac{\bar{K}_i}{(s - \bar{c}_i)} + \sum_{i=2k+1}^n \frac{K_i}{(s - r_i)}, \quad (51)$$

missä

$$K_i = \lim_{s \rightarrow c_i} (s - c_i) \bar{Y}(s), \quad i = 1, \dots, k$$

$$\bar{K}_i = \lim_{s \rightarrow \bar{c}_i} (s - \bar{c}_i) \bar{Y}(s), \quad i = 2k+1, \dots, n$$

ja toisaalta

$$Y_2(s) = \frac{A}{s + j\omega} + \frac{B}{s - j\omega} \quad (52)$$

missä

$$A = \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s + j\omega) Y(s)$$

$$B = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) Y(s),$$

jolloin siis

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$$

ja vastaaville aikafunktioille pätee $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$. Kaavojen (26) ja (27) perusteella saadaan

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^k |K_i| e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i) + \sum_{i=2k+1}^n K_i e^{r_i t}. \quad (53)$$

Stabiilille järjestelmälle $\sigma_i < 0$ ja $r_i < 0$, jolloin $y_1(t) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$. Oletetaan, että sisäänmenosignaali on vaikuttanut niin kauan, että $y_1 \approx 0$. Vasteen määrää tällöin y_2 . Yhtälöistä (50) ja (52) saadaan

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2j} G(-j\omega) \\ B &= \frac{1}{2j} G(j\omega) \end{aligned} \quad (54)$$

jolloin

$$Y_2(s) = \frac{G(-j\omega)}{-2j(s + j\omega)} + \frac{G(j\omega)}{2j(s - j\omega)}. \quad (55)$$

Koska $G(-j\omega) = \bar{G}(j\omega)$ (kompleksikonjugaatti), niin

$$\begin{aligned} Y_2(s) &= \frac{1}{2j(s^2 + \omega^2)} [G(j\omega)(s + j\omega) - \bar{G}(j\omega)(s - j\omega)] \\ &= \frac{1}{2j(s^2 + \omega^2)} [s(G(j\omega) - \bar{G}(j\omega)) + j\omega(G(j\omega) + \bar{G}(j\omega))] \\ &= \frac{1}{2j(s^2 + \omega^2)} \{s2j \operatorname{Im}[G(j\omega)] + j\omega2 \operatorname{Re}[G(j\omega)]\} \\ &= \operatorname{Im}[G(j\omega)] \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \operatorname{Re}[G(j\omega)] \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (56)$$

Laplace-käänteismuuntamalla saadaan

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \operatorname{Im}[G(j\omega)] \cos \omega t + \operatorname{Re}[G(j\omega)] \sin \omega t \\ &= \operatorname{Im}[G(j\omega) e^{j\omega t}]. \end{aligned} \quad (57)$$

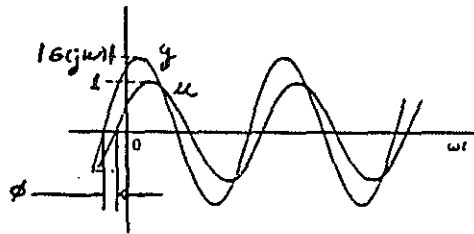
Kirjoitetaan kompleksiluku $G(j\omega)$ polaarimuodossa

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi}, \quad (58)$$

missä $\phi = \arg G(j\omega)$. Yhtälöstä (57) saadaan

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \operatorname{Im} [|G(j\omega)| e^{j(\omega t + \phi)}] \\ &= |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi). \end{aligned} \quad (59)$$

Saatiin siis seuraava tulos: sinimuotoisen signaalin vaste on samantaajuinen sinimuotoinen signaali, jonka vaihesiirto alkuperäiseen signaaliin nähden on $\phi = \arg G(j\omega)$ ja joka on vahvistunut kertoimella $|G(j\omega)|$. Tulosta havainnollistaa kuva 12.



Kuva 12. Lineaarisen järjestelmän vaste sinimuotoisella herätteellä.

Tulos saatiin olettamalla, että sisäänmenosignaali on vaikuttanut riittävän kauan, jotta $y_1 \approx 0$. Muussa tapauksessa vaste on y_1 :n (yhtälö 53) ja y_2 :n (yhtälö 59) summa. Vastaava tulos voidaan johtaa myös kosinimuotoiselle sisäänmenolle.

Kompleksiluku $G(j\omega)$ määrää taajuudella ω värähtelevän sini- tai kosinimuotoisen sisäänmenosignaalin vasteen. Kulmataajuuden ω funktiota $G(j\omega)$ kutsutaan taajuusvasteeksi. Boden diagrammissa piirretään $|G(j\omega)|$ (amplitudi- tai vahvistuskäyrä) ja $\arg G(j\omega)$ (vaihekäyrä) erikseen logaritmisella ω -asteikolla. Vahvistuskäyrä piirretään yleensä logaritmisella asteikolla. $|G(j\omega)|$:n suuruus desibeleinä on $20 \lg |G(j\omega)|$. Desibeliasteikon käytöstä seuraa, että kytkettyjen järjestelmien vahvistuskäyrä saadaan laskemalla osajärjestelmien vahvistuskäyrät yhteen: $20 \lg |G_1(j\omega)| |G_2(j\omega)| = 20 \lg |G_1(j\omega)| + 20 \lg |G_2(j\omega)|$. Sama pätee myös vaihekäyriille:

$\arg [G_1(j\omega)G_2(j\omega)] = \arg G_1(j\omega) + \arg G_2(j\omega)$. Siirtofunktion Boden diagrammi voidaan tällöin konstruoida seuraavista termeistä:

$$\begin{aligned} &K \\ &(j\omega)^{\pm n} \\ &(1 + j\omega\tau)^{\pm m} \\ &\left[1 + \frac{j2\omega\zeta}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\pm p} \end{aligned} \quad (60)$$

Koko siirtofunktion Boden diagrammi saadaan piirtämällä ensin siirtofunktion muotoa (60) olevien tekijöiden Boden diagrammit ja laskemalla sitten osatekijöiden diagrammit yhteen. Seuraavassa tarkastellaan erikseen kutakin termiä yhtälössä (60).

Vakiovahvistus K

Vahvistustermi on riippumaton ω :n arvosta. Se siirtää vahvistuskäyrää vakiomäärän ylös- tai alaspäin. Vaihekäyrään termi ei vaikuta.

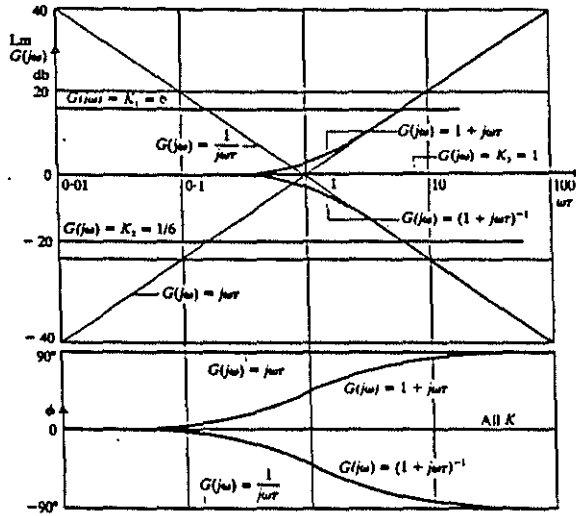
Termi $(j\omega)^{\pm n}$

Vahvistuskäyrään tulee suora viiva $\pm 20 n \lg \omega$, joka saa arvon 0 dB , kun $\omega = 1$, ja joka laskee tai nousee $20n \text{ dB /dekadi}$. Vaihekäyrään tulee vakiovaihesiirto $\pm n\pi/2$.

Termi $(1 + j\omega\tau)^{\pm m}$

Olkoon aluksi $m = 1$ ja tarkastellaan negatiivista eksponenttia. Vahvistuskäyrä on tällöin $-20 \lg \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \text{ dB}$. Pienillä $\omega\tau$:n arvoilla vahvistus on likimäärin $-20 \lg 1 \text{ dB} = 0 \text{ dB}$. Kun $\omega\tau \gg 1$, saadaan likimäärin vahvistus $-20 \lg \omega\tau$, joka saa arvon nolla, kun $\omega = 1/\tau$, ja jonka kuvaaja arvoilla $\omega > 1/\tau$ on -20 dB /dekadi laskeva suora. ω :n arvoa $\omega = 1/\tau$, jossa arvoille $\omega\tau < 1$ ja $\omega\tau > 1$ saadut kuvaajat leikkavat, kutsutaan kulma- tai nurkkataajuudeksi.

Vaihetermiksi saadaan $-\arctan \omega\tau$. Vaihekäyrä alkaa arvosta nolla ja lähestyy ω :n kasvaessa asymptoottisesti arvoa $-\pi/2$.



Kuva 13. Termien K , $(j\omega)^{\pm 1}$ ja $(1+j\omega r)^{\pm 1}$ Boden diagrammit.

Yleinen termi $(1+j\omega r)^{\pm m}$ käyttäytyy pienillä taajuuksilla kuten termi $(1+j\omega r)^{-1}$ nurkkataajuuden ollessa edelleen $\omega = 1/r$. Suurilla ω :n arvoilla kuvaaja on suora, joka yleisessä tapauksessa laskee tai nousee $20m$ dB /dekadi. Vaihekäyrä alkaa edelleen arvosta nolla, ja se lähestyy asymptootisesti arvoa $\pm m\pi/2$. Termien K , $(j\omega)^{\pm 1}$ ja $(1+j\omega r)^{\pm 1}$ Boden diagrammit on esitetty kuvassa 13.

Termi $(1 + j\frac{2\omega\zeta}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2)^{\pm p}$

Yllä olevat termit ovat riittäviä, jos siirtofunktion osoittajan ja nimittäjän juuret ovat reaalisia. Jos siirtofunktion osoittajassa tai nimittäjässä on kompleksisia juuria (jotka esiintyvät aina liittolukuina) niin siirtofunktion tekijänä on termi $(1 + 2\zeta s/\omega_n + (s/\omega_n)^2)^{\pm p}$, missä vaimennuskerroin $\zeta \in (0,1)$. Kuten edellä voidaan yleisyyttä rajoittamatta tarkastella tapausta $p = 1$ eksponentin ollessa negatiivinen. Tällöin

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}} \quad (61)$$

joten

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\arg G(j\omega) = \begin{cases} -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} & \text{kun } 0 \leq \omega < \omega_n \\ -\frac{\pi}{2} & \text{kun } \omega = \omega_n \\ -\pi + \arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1} & \text{kun } \omega > \omega_n \end{cases} \quad (62)$$

Pienillä ω :n arvoilla saadaan

$$20 \lg |G(j\omega)| \text{ dB} \approx 20 \lg 1 \text{ dB} = 0 \text{ dB}.$$

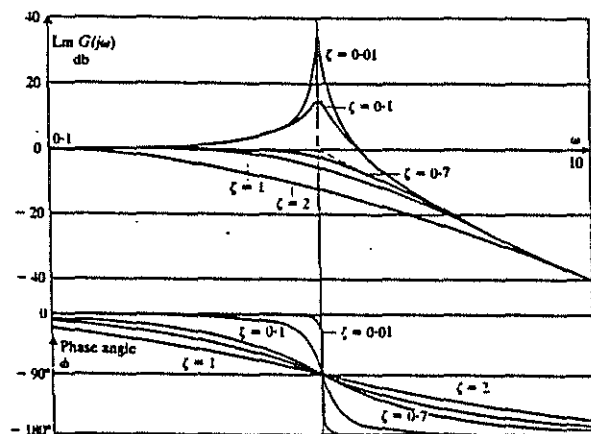
Toisaalta suurilla ω :n arvoilla

$$20 \lg |G(j\omega)| \text{ dB} \approx -40 \lg \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB},$$

jonka kuvaaja on 40 dB / dekadiläsnä suora. Asymptootit leikkaavat kohdassa $\omega = \omega_n$. Kuvaajan käyttäytymisen kohdan $\omega = \omega_n$ ympäristössä määrää vaimennuskerroin ζ . Jos ζ on pieni, on yhtälössä (62) $|G(j\omega)|$:n nimittäjä pieni kohdan $\omega = \omega_n$ ympäristössä, jolloin termillä $|G(j\omega)|$ on suuri vaikutus vahvistuskäyrään. Kulmataajuuden arvoilla $\omega = \omega_n$ vahvistuskäyrässä on resonanssihuippu.

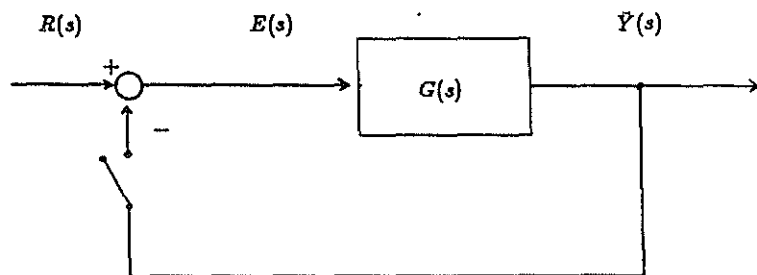
Yhtälöstä (62) nähdään, että vaihekäyrä alkaa arvosta nolla, ja lähestyy arvoa $-\pi$, kun $\omega \rightarrow \infty$. Arvolla $\omega = \omega_n$ vaihekäyrä saa arvon $-\pi/2$. Kuvassa 14 on esitetty Boden diagrammi eri ζ :n arvoilla.

Boden diagrammia voidaan käyttää hyväksi tarkasteltaessa takaisinkytketyn järjestelmän stabiiliisuutta, jonka määräävät yhtälön (37) juuret. Merkitään avoimen järjestelmän siirtofunktiota $G(s)$:llä, jolloin siis $G(s) = KG_o(s)G_a(s)$. Karakteristiseksi yhtälöksi saadaan $1 + G(s) = 0$ eli $|G(s)| = 1$ ja $\arg G(s) = -\pi$. Tarkastellaan seuraavaksi yksinkertaista koetta, jonka perusteella voidaan perustella Boden diagrammin käyttöä stabiiliisuuden analysoinnissa.



Kuva 14. Termin $(1 + \frac{j2\omega\zeta}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2)^{\pm p}$ Boden diagrammi erilaisilla vaimennuskertoimilla.

Katkaistaan takaisinkytkentähaara seuraavasti:



Asetetaan tämän jälkeen asetusravoksi $r(t) = \sin \omega_0 t$, ja etsitään kulmataajuus ω_0 siten, että sisäänmenon ja ulostulon välinen vaihe-ero on täsmälleen 180° . Jos nyt takaisinkytkentähaara kytketään takaisin, takaisinkytkentäsignaali on samassa vaiheessa asetusravon kanssa (tai tarkemmin 360° jäljessä siitä). Asetusravosignaali voidaan siis poistaa, ja järjestelmä saa ohjauksensa ainoastaan takaisinkytkennän kautta. Jos avoimen järjestelmän vahvistus on pienempi kuin yksi kulmataajuudella ω_0 ,

värähtely vaimenee kohti nollaa. Jos vahvistus on yksi, järjestelmä jää värähtelemään vakioamplitudilla. Jos avoimen järjestelmän vahvistus on suurempi kuin yksi kulmataajuudella ω_0 , värähtelyn amplitudi kasvaa rajatta aina kun signaali kulkee silmukan läpi.

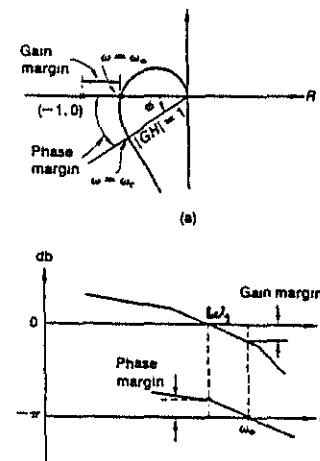
Yllä olevan perusteella voidaan päätellä, että takaisinkytketty järjestelmä on epästabiili, jos avoimen silmukan vaihesiirtoa -180° vastaava vahvistuksen arvo on suurempi kuin yksi. Kyseinen ominaisuus on suoraan luettavissa Boden diagrammista. Stabiilisuden tarkastelemiseksi määritellään vahvistusvara, joka on vaihesiirtoa -180° vastaavan vahvistuksen käänteisarvo:

$$\begin{aligned} \text{vahvistusvara} &= 20 \lg \frac{1}{|G(j\omega_0)|} \text{ dB} \\ &= -20 \lg |G(j\omega_0)| \text{ dB} \end{aligned}$$

ja vaihevara, joka on vaihesiirron etäisyys arvosta -180° , kun vahvistus on yksi. Olkoon $|G(j\omega_1)| = 1$, jolloin

$$\begin{aligned} \text{vaihevara} &= \arg G(j\omega_1) - (-180^\circ) \\ &= 180^\circ - \text{avoimen silmukan vaihesiirto.} \end{aligned}$$

Vahvistus- ja vaihevara on kuvattu kuvassa 15.

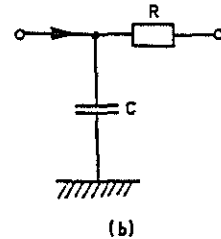
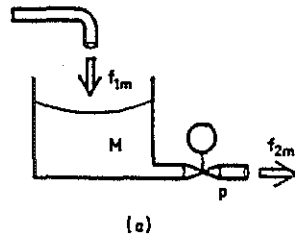


Kuva 15. Vahvistus- ja vaihevara.

Esimerkki. Tarkastellaan virtaavan aineen tuotantoprosessia, jossa satunnaisten häiriöiden vaikutuksesta tuotanto on epätasaista. Ainetta käyttävässä prosessissa tarvittaisiin kuitenkin mahdollisimman tasainen tulovirtaus, jolloin tuotannon satunnaiset häiriöt olisi suodatettava pois. Tehtävänä on suunnitella alipäästösuo-datin, joka suodattaa virtauksesta suuri-taajuiset häiriöt. Suodatuksessa voidaan käyttää väli-varastoa, johon tuo-tannosta tuleva aine siirretään ja josta se siirretään edelleen käsiteltäväksi toiseen prosessiin. Läpivirtaussäiliölle (kuva 16) voidaan kirjoittaa lineaarinen yhtälö

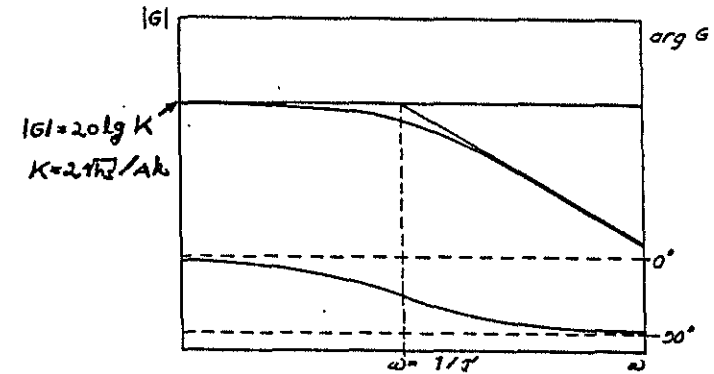
$$\frac{dh}{dt} + \frac{k}{2\sqrt{h_s}}h = \frac{f}{A},$$

missä h on säiliön pinnankorkeuden poikkeama nominaaliarvostaan h_s , f on tulovirtaus, A on pinnankorkeutta h_s vastaava säiliön poikkipinta ja k on vakio, joka riippuu nesteen tiheydestä ja poikkipinta-alasta A .



Kuva 16. Läpivirtaussäiliö ja sen sijaiskytkentä.

Vertaamalla säiliön yhtälöä yleiseen ensimmäisen kertaluvun järjestelmän yhtälöön (31) todetaan, että aikavakio on $\tau = 2\sqrt{h_s}/k$ ja vahvistus on $2\sqrt{h_s}/Ak$. Järjestelmän Boden diagrammiksi saadaan:



Säiliö mitoitetaan valitsemalla taajuusalue, jonka säiliö saa päästää läpi ja toisaalta taajuudet, jotka säiliön on suodatettava pois. Säiliön mitoituksella tarkoitetaan parametrien A ja h_s valintaa, jotka määräävät nurkkataajuuden $1/\tau$ ja säiliön vahvistuksen.

3.3 PID - säätäjät

Olkoon kohdejärjestelmä sellainen, että ohjauksen kasvattaminen kasvattaa järjestelmän lähtösignaalia ja toisaalta ohjauksen pienentäminen aiheuttaa lähtösignaalin pienenemisen. Olkoon ongelmana servo-ongelma, jossa lähtösignaalin tulee mahdollisimman tarkasti seurata annettua referenssignaalia. Jos järjestelmän käyttäytyminen tunnettaisiin tarkasti, voitaisiin tarvittava ohjaus laskea ennakolta ajan funktiona esimerkiksi tiedostoon, josta se sitten järjestelmää ohjattaessa luettaisiin. Ohjausta kutsutaan tällöin *avoimeksi ohjaukseksi*. Käytännön tehtävissä ei järjestelmästä ole kuitenkaan käytössä tarkkaa mallia, joka sisältäisi kohdejärjestelmän mallin lisäksi myös mallin mahdollisista ulkopuolisista häiriöistä, jolloin avoimen ohjauksen soveltaminen ei ole mahdollista. Järjestelmää on tällöin säädettävä sen todellisen käyttäytymisen perusteella, jolloin säätöstrategiassa otetaan huomioon lähtösignaalin y todelliset arvot. Säätö suoritetaan nominaalitraktorin ympäristössä, jolloin säätölaissa tarkastellaan ohjauksen ja lähtösignaalin poikkeamia nominaaliarvoistaan.

Luonnollinen tapa järjestelmän säätämiseksi on valita ohjaus suhteessa lähtösignaalin poikkeamaan referenssiarvostaan

$$u = K_p (y_{ref}(t) - g(t)). \quad (63)$$

Kun lähtösignaali on referenssignaalin alapuolella, ohjausta kasvatetaan referenssiarvon saavuttamiseksi ja päin vastoin. Säätöä kutsutaan tällöin suhdessäädöksi tai P-säädöksi (proportional). P-säädöllä voidaan pienentää lähtösignaalin ja referenssignaalin eroa, mutta sitä ei voida kuitenkaan täysin poistaa. Tämä ilmiö nähdään seuraavanlaisella tarkastelulla. Olkoon nollaohjauksella $u = 0$ lähtösignaali referenssignaalin alapuolella. Säätölaki (63) kasvattaa tällöin ohjauksen arvoa, jolloin y kasvaa. Jos virhe kyettäisiin täysin eliminomaan, säätäjä (63) antaisi jälleen nollaohjauksen, mikä kuitenkin oletuksen mukaan johtaa liian pienen lähtösignaalin arvoon. Uuden referenssignaalin ylläpitämiseksi tarvitaan nollasta poikkeavaa ohjausta, joka saadaan kaavasta (63) vahvistuksen K_p ja säätövirheen tulona.

Vakiopoikkeaman olemassaolo voidaan nähdä myös tarkastelemalla erosuureen ja asetusrvon välistä siirtofunktiota, kun säätäjänä on P-säätäjä.

Tällöin yhtälöstä (36) saadaan

$$\frac{\bar{Y}(s)}{R(s)} = \frac{K_p G_s(s)}{1 + K_p G_s(s)}.$$

Toisaalta $E(s) = R(s) - \bar{Y}(s)$, jolloin

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + K_p G_s(s)}.$$

Kun referenssisignaali tapahtuu yksikköaskelmuutos, $R(s) = 1/s$, ja lopuarvoteoreeman perusteella saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{s(1 + K_p G_s(s))} \right]. \end{aligned}$$

Jos $G_s(s)$:llä ei ole nappoja nollassa (eli $G_s(s)$:n nimittäjässä ei ole tyyppiä s^n olevaa termiä), niin se voidaan kirjoittaa muodossa

$$G_s(s) = K_0 \frac{1 + a_1 s + \dots + a_n s^n}{1 + b_1 s + \dots + b_p s^p}$$

jolloin virheen e tasapainoarvoksi saadaan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1 + K_p K_0}.$$

Virhettä voidaan pienentää suurentamalla vahvistusta K_p . Liian suuri K_p :n arvo tekee järjestelmästä kuitenkin epästabiilin.

P-säädössä ilmenevä ongelma voidaan poistaa lisäämällä säätäjään termi, joka kasvattaa ohjausignaalin arvoa niin kauan kun lähtösignaali on pienempi kuin referenssignaali. Tämä saadaan aikaan termillä, joka on verrannollinen virhetermin integraaliin, jolloin saadaan säätäjä

$$u = K_p (y_{ref}(t) - g(t)) + K_I \int_0^t (y_{ref}(s) - g(s)) ds. \quad (64)$$

Säätöä kutsutaan suhde- ja integroivaksi säädöksi tai PI-säädöksi, jonka avulla on siis mahdollista eliminoida poikkeamat. Vahvistuskertoimia K_p ja K_I kasvattamalla järjestelmä seuraa herkemmin asetusrvoa, mutta ongelmaksi tulee epästabiiliisuus. PI-säädön epästabiiliisuus johtuu siitä, että lähtösignaalin arvo ei määrää täysin systeemin tilaa, jolloin lähtösignaalin

perusteella tapahtuvassa säädössä ei oteta huomioon viimeisten ohjaustoi-
menpiteiden vielä näkymättömiä vaikutuksia. Sääto perustuu siis liiaksi
vanhalle informaatiolle. Ilmiö korostuu säädettäessä järjestelmiä, jotka si-
sältävät viiveitä.

Eräs tapa epästabiilisuusongelman ratkaisemiseksi on lähtösignaalin käyt-
tämisen ennakoiti sen derivaatan perusteella. Säättäjään tulee tällöin
termi, joka on verrannollinen erosuureen $e(t) = y_{ref}(t) - y(t)$ derivaattaan,
jolloin säätäjä voidaan kirjoittaa erosuureen avulla seuraavasti

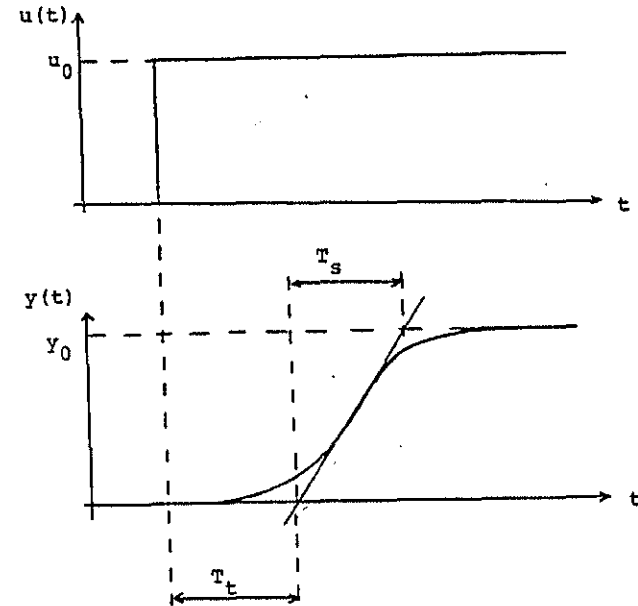
$$u = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(s) ds + K_D \frac{d}{dt} e(t). \quad (65)$$

Säättäjää kutsutaan tällöin PID-säättäjäksi. Yllä olevan perusteella voi-
daan päätellä vahvistustermien K_p , K_I ja K_D vaikutus järjestelmän toi-
mintaan: Suuri K_p :n arvo tekee säätäjän nopeaksi, mutta samalla stabiili-
suusominaisuudet huononevat. Integraalitermin mukaan ottaminen elimi-
noi vakiopoikkeaman, mutta huonontaa stabiilisuutta. Derivointitermi pa-
rantaa stabiilisuusominaisuuksia. PID-säättäjät ovat teollisuudessa eniten
käytetty säätäjärakenne. Usein jätetään derivointiosa pois, jolloin saadaan
PI-säättäjä. Säättäjä kirjoitetaan usein myös muodossa

$$u = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(s) ds + T_D \frac{d}{dt} e(t) \right], \quad (66)$$

jolloin integroinnin ja derivoinnin aikavakiot T_I ja T_D saavat ajan dimension.

PID-säättäjän virittämiseksi on useita tapoja. Tässä esityksessä tarkas-
tellaan säätäjän virittämistä askelvastekokeen avulla. Askelvastekokeessa
säätöpiirin myötähaara katkaistaan ja kohdejärjestelmään syötetään oh-
jaukseksi askelmuotoinen signaali, jolloin lähtösignaali muuttuu kuvan 17
osoittamalla tavalla.



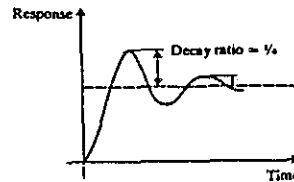
Kuva 17. Askelvastekoe.

Kuvaan merkityistä suureista saadaan Ziegler ja Nichols'in tai vaihtoehtoi-
sesti Coon'in kriteerien perusteella säätäjän parametrit seuraavasti:

Ziegler-Nichols Coon

P-säätäjä:	$K = \frac{T_s u_0}{T_t y_0}$	$K = \frac{T_s u_0}{T_t y_0} \left(1 + \frac{T_t}{3T_s}\right)$
PI-säätäjä:	$K = 0.9 \frac{T_s u_0}{T_t y_0}$	$K = \frac{T_s u_0}{T_t y_0} \left(0.9 + \frac{T_t}{12T_s}\right)$
	$T_I = 3T_t$	$T_I = T_t \frac{30 + 3T_t/T_s}{9 + 20T_t/T_s}$
PID-säätäjä:	$K = 1.2 \frac{T_s u_0}{T_t y_0}$	$K = \frac{T_s u_0}{T_t y_0} \left(1.33 + \frac{T_t}{4T_s}\right)$
	$T_I = 2T_t$	$T_I = T_t \frac{32 + 6T_t/T_s}{13 + 8T_t/T_s}$
	$T_D = 0.5T_t$	$T_D = T_t \frac{4}{11 + 2T_t/T_s}$

Molemmissa kriteereissä on lähtökohtana kuvan 18 mukainen säätöjärjestelmän askelvaste, jossa vaimennussuhde on 0.25. Coon kriteerit ovat yksityskohtaisempia. Niiden lähtökohtana on systeemin kuvaus ensimmäisen kertaluvun systeeminä ja viiveenä, jolloin ne minimoivat vakiopoikkeaman ja integraalivirheen. Saatuja parametreja käytetään alkuarvoina, joita parannetaan tarvittaessa hienosäädöllä.



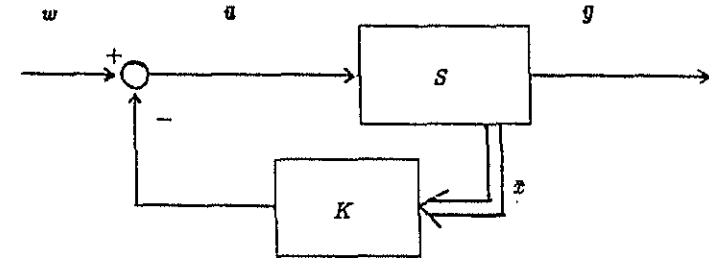
Kuva 18. Haluttu vasteen käyttäytyminen asetusarvoa muutettaessa.

4. TILATAKAISINKYTKENTÄ

Tilayhtälöesitykseen perustuvassa lähestymistavassa käytetään ohjauksen määrittämiseen systeemin tilaa, jolloin järjestelmän sisäinen toiminta määrää käytettävän ohjauksen. Lineaarisia järjestelmiä tarkasteltaessa ohjauslaki on lineaarinen:

$$u(t) = -Kx(t) + w(t) \quad (67)$$

Kun sisäänmenosignaaleja on yksi kpl, takaisinkytkentävahvistus K on n -dimensioinen rivivektori, $K = (k_1, \dots, k_n)$, ja w on ylimääräinen ulkopuolinen referenssisignaali. Tilatakaisinkytkentää voidaan havainnollistaa seuraavasti:



Systeemyhtälö on

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ g &= Cx \end{aligned} \quad (68)$$

jolloin tilatakaisinkytkennällä (67) saadaan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x + Bw \\ g &= Cx. \end{aligned} \quad (69)$$

Suljetun systeemin (69) dynaamisen käyttäytymisen määräävät nyt matriisin $A - BK$ ominaisarvot, joihin voidaan vaikuttaa K :n valinnalla.

Jos järjestelmä (68) on täydellisesti ohjattava ja

$$p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \quad (70)$$

mielivaltainen polynomi, niin on olemassa K siten, että $\det(\lambda I - (A - BK)) = p(\lambda)$. Jos järjestelmä on siis täydellisesti ohjattava, sille voidaan saada mielivaltainen dynamiikka. Järjestelmä (68) on täydellisesti ohjattava, jos ja vain jos ohjattavuusmatriisin

$$Q_c = [B | A B | \dots | A^{n-1} B]$$

rangi on n .

Tarkastellaan seuraavaksi ulkoisen signaalin w valintaa säätölaissa (67). Olkoon alkuperäisen järjestelmän siirtofunktio

$$G(s) = \frac{\tilde{Y}(s)}{\tilde{U}(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (71)$$

Tilatakaisinkytketyn järjestelmän siirtofunktioksi \tilde{y} -n ja w -n välille saadaan

$$\frac{\tilde{Y}(s)}{W(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n} \quad (72)$$

missä siis osoittaja on sama kuin alkuperäisessä järjestelmässä ja nimittäjän kertoimet α_i määräytyvät takaisinkytkentävahvistuksesta K . Ulkoinen signaali w valitaan referenssisignaalin r funktiona

$$W(s) = G_r(s)R(s). \quad (73)$$

Useissa tapauksissa ollaan kiinnostuneita staattisesta vahvistuksesta eli taa-juuden nolla vahvistuksesta, joka saadaan siirtofunktiosta $s:n$ arvolla nolla. \tilde{y} -n ja w -n väliseksi staattiseksi vahvistukseksi saadaan tällöin b_n/α_n . Servo-ongelmissa on luonnollista valita \tilde{y} -n ja r -n staattiseksi vahvistukseksi yksi, jolloin yhtälöstä (73) saadaan G_r -lle vakioarvo α_n/b_n eli

$$w(t) = \frac{\alpha_n}{b_n} r(t).$$

Edellä olemme todenneet, että täydellisesti ohjattavalle järjestelmälle voidaan tilatakaisinkytkennällä saada mielivaltainen dynamiikka. Säätäjän suunnittelun ongelma on tällöin napojen sijainnin valinta. Napojen sijainnin

vaikutusta järjestelmän dynaamiseen käyttäytymiseen on tarkasteltu luvussa 3.1. Napojen sijainnin valinta on monitavoitteinen päätöksentekotehtävä, sillä järjestelmän toiminnan nopeuden kannalta navat tulisi sijoittaa kauas origosta vasempaan puolitasoon, mutta tällöin vaadittavat ohjaussignaalit tulevat suuriksi. Järjestelmän toiminnan nopeuden ja tarvittavan ohjauksen suuruuden välillä on tällöin tehtävä kompromissi. Eräs tapa ratkaista tämä monitavoitteinen tehtävä on valita takaisinkytkentävahvistus K siten, että neliöllinen kriteeri

$$J = \frac{1}{2} [x(t_f) - r(t_f)]' H [x(t_f) - r(t_f)] + \frac{1}{2} \int_0^T \{ [x(t) - r(t)]' Q [x(t) - r(t)] + u'(t) R u(t) \} dt \quad (74)$$

minimoituu, missä r on tilalle asetettu referenssisignaali. Rajoituksena on systeemiytälö (68). On huomattava, että tehtävänasettelu soveltuu yleisille useita tuloja ja lähtöjä sisältäville järjestelmille. Optimaalinen ohjaus on

$$u^*(t) = F(t)x(t) + v(t), \quad (75)$$

missä

$$\begin{aligned} F(t) &= -R^{-1} B' K(t) \\ v(t) &= -R^{-1} B' s(t) \end{aligned} \quad (76)$$

ja K sekä s saadaan ratkaistua loppuarvotehtävistä

$$\dot{K}(t) = -K(t)A - A'K(t) - Q + K(t)BR^{-1}B'K(t), \quad K(T) = H \quad (77)$$

$$\dot{s}(t) = -[A' - K(t)BR^{-1}B']s(t) + Qr(t), \quad s(T) = -Hr(T). \quad (78)$$

Suunnittelijan tehtäväksi jää painokerroinmatriisien H , Q ja R valinta.

Esimerkki. Tarkastellaan järjestelmää

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \quad 1) x. \end{aligned}$$

Järjestelmän navat ovat -1 ja $+1$, jolloin järjestelmä on siis epästabiili. Järjestelmän stabiloimiseksi tehdään tilatakaisinkytkentä siten, että molemmat navat ovat pisteessä -1 . Ohjaus on muotoa

$$u = -(k_1 \quad k_2) x + w,$$

jolloin takaisinkytketyksi järjestelmäksi saadaan

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -k_1 & 1-k_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} w.$$

Takaisinkytketyn järjestelmän ominaisarvot saadaan karakteristisesta yhtälöstä

$$\det(\lambda I - (A - BK)) = \det \begin{pmatrix} \lambda + k_1 & -1 + k_2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + k_1\lambda + (k_2 - 1) = 0.$$

Koska takaisinkytketyn järjestelmän navat halutaan pisteeseen -1 , asetetaan karakteristiseksi yhtälöksi

$$(\lambda + 1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Vertaamalla karakteristisia yhtälöitä keskenään, todetaan, että haluttu dynamiikka saadaan valitsemalla $k_1 = k_2 = 2$, jolloin

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

KIRJALLISUUSVIITTEET

Anand, D. K., 1974, Introduction to control systems, Pergamon Press, Oxford, New York.

Glad, T. ja Ljung, L., 1981, Reglerteknik - grundläggande teori, Studentlitteratur, Lund.

Hakkala, L. ja Ylinen, R., 1978, Johdatus moderniin systeemi- ja säätöteoriaan, Otakustantamo 442, Espoo.

Kirk, D. E., 1970, Optimal control theory - an introduction, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Kortela, U. ja Virkkunen J., 1978, Dynaamiset järjestelmät, Otakustantamo 419, Espoo.

Ljung, L., 1981, Reglerteori - moderna analys- och syntesmetoder, Studentlitteratur, Lund.

Richards, R.J., 1979, An introduction to dynamics and control, Longman, London and New York.

Spiegel, M. R., 1965, Theory and problems of Laplace transforms, Schaum Publishing Co., New York.

Väisälä, K., 1977, Matematiikka IV, Otakustantamo 141, Espoo.