Differentiaaliyhtälöt kurssille S1
(Versio 3.0)

Jarmo Malinen

1. joulukuuta 2009

Sisältö

1 Alkusanat

Tässä monisteessa esitetään vakiokertoimisten lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ja differentiaaliyhtälösysteemien teoriaa siinä muodossa kuin olen sen luennoinut TKK:n Sähköosaston peruskurssilla S1 syksyllä 2002. Materiaalin laajuus luennoituna on 7 kaksoisluentoa.

Esitietoina edellytetään kompleksilukujen ja matriisilaskun tuntemusta, mutta ei juurikaan integrointioppia yli lukion oppimäärän. Esitystapa pyrkii painottamaan insinöörikäytännön aspekteja enemmän kuin esityksen matemaattista täydellisyyttä – josta nöyrin anteeksipyyntöni kaikille niille, joita se nyppii.

Oheislukemista tämän monisteen differentiaaliyhtälöistä löytyy esimerkiksi kirjasta E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics. Kirjan kahdeksannessa painoksessa luvut ovat 1.1, 1.7, 2.2–2.5, 2.7, 2.8, 2.10–2.15, 3.0–3.4. Kirjan esitystapa on kovin erilainen ja paljon laajempi tähän monisteeseen verrattuna.

Monisteesta löytyvistä virheistä pyydän ilmoittamaan sähköpostitse: jmalinen@math.hut.fi.

Jarmo Malinen

2 Notaatiota

Symbolit $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}_+$ merkitsevät reaaliakselia ja positiivista reaaliakselia (mukaanlukien piste 0). Kompleksitasoa merkitään symbolilla $\mathbb{C}$.

Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tai yleisemmin jopa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) n. kertaluvun derivaattoja pisteessä t merkitään kahdella tavalla

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n}(t).$$

Ensimmäisen ja toisen kertaluvun derivaattoja merkitään myös liskäksi symboleilla f' ja f''.

Jos funktiolla f on derivaatta $f'(t)$ jokaisessa pisteessä $t \in \mathbb{R}$ ja lisäksi derivaattafunktio $t \mapsto f'(t)$ on jatkuva, kirjoitetaan $f \in C^1(\mathbb{R})$. Tällaista funktiota sanotaan jatkuvasti derivoituvaksi. Jos taas f on jatkuvasti derivoituva joukossa $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ ja lisäksi sillä on yksipuoleinen derivaatta $f'(0)$ pisteessä 0, kirjoitetaan $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$, mikäli näin määritelty f' on jatkuva koko joukossa $\mathbb{R}_+$. Milloin epäselvyyttä ei ole määrittelyjoukosta, puhutaan ainoastaan C^1-funktioista. Symbolilla $f \in C^n(\mathbb{R})$ tarkoitetaan analogisesti funktiota, jonka kaikki derivaatat kertalukuun $n \geq 1$ asti ovat jatkuvia joukossa $\mathbb{R}$.

3 Johdanto

Tässä luvussa motivoidaan fysiikan esimerkkien avulla sitä, miksi jotain differentiaaliyhtälön tapaista on joskus keksitty.

3.1 Hajoamislaki

Tutkitaan radioaktiivista hajoamista pienissä näytteissä. Merkitään kokonaislukuarvoisella funktiolla $n = n(t)$ näytteessä olevien hajoamattomien erään uraani-isotoopin ytimien määrää hetkellä $t \geq 0$. [1] Alkuhetkellä $t = 0$ hajoamattomien ytimien määrä n_0 oletetaan tunnetuksi.

Pienien tai konsentraatioltaan laimeiden näytteiden tapauksessa maalaisjärki sanoo, että ytimien voidaan olettaa hajoavan toisistaan riippumatta, ja että hajoamisten lukumäärä aikavälillä $[t, t + \Delta t]$ (Δt pieni t:hen verrattuna) on suoraan verrannollinen näytteessä tuolloin olevien hajoamattomien ytimien lukuun $n(t)$.

Olemme kiinnostuneita kirjoittamaan funktiolle $n(t)$ lausekkeen, joka ottaisi huomioon edellä sanotun. Koska kokonaislukuarvoisten funktioiden käsittely on matemaattisesti kompelöä, ja hiukkasten suuren määrän takia funktion $n(t)$ suhteelliset muutokset pienillä ajanväleillä ovat mitättömiä, leikitään että $n(t)$ olisi itseasiassa C^1-funktio.

Kun $\Delta t > 0$ on kohtuullisen pieni, voidaan kirjoittaa likimäärin

$$\begin{cases} n(t + \Delta t) - n(t) \approx \lambda \cdot n(t) \cdot \Delta t, \\ n(0) = n_0, \end{cases}$$

jossa $\lambda < 0$ on radioaktiivisesta aineesta riippuva nk. hajoamisvakio. Oletetaan edelleen, että edellinen arvio hajoamisten määrälle aikavälillä $[t + \Delta t, t]$ käy sitä paremmaksi, mitä pienempi aikavälin pituus Δt on. Jakamalla molemmat puolet Δt:llä ja käyttämällä derivaatan määritelmää

$$n'(t) = \frac{dn(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{\Delta t},$$

saadaan välttämätön ehto, jonka funktion $n(t)$ tulee toteuttaa

$$(1) \qquad \begin{cases} n'(t) = \lambda n(t), \quad t \geq 0, \\ n(0) = n_0. \end{cases}$$

Jos jollain ilveellä pystymme näyttämään, että on olemassa täsmälleen yksi C^1-funktio[2] joka toteuttaa molemmat yhtälöt (1), olemme kovin tyytyväisiä. Silloinhan olemme (tehtyjen likimääräistyksien rajoissa) löytäneet näytteelle hajoamislain. Tällä kertaa tyytyväisyyteen on onneksi aihetta.

[1] Oletetaan, että tapahtuneet hajoamiset eivät nopeuta (eivätkä hidasta) toisten, vielä hajoamattomien U-atomien hajoamista. Leikitään siis, että U-atomeja on näytteessä niin vähän ja että ne ovat niin harvassa, että juuri hajonneitten uraaniatomien (tai näytteessä olevien muiden radioaktiivisesti hajoavien aineiden) ei vaikuta toisiinsa. Mistään ketjureaktioista emme ole tässä kiinnostuneita.

[2] ja muille, yleisemmille funktioille yhtälö (1) ei ole alkuunkaan järkevä. Kerro miksi?

Esimerkki 1. *Osoita, että kaikki funktiot $x_C(t) = Ce^{\lambda t}$, $C \in \mathbb{R}$, toteuttavat ylemmän yhtälöistä* (1)*. Jos edelleen valitaan $C = n_0$, niin jälkimmäinenkin yhtälö toteutuu. Kuinka kauan menee, jotta näytteen aktiivisuus on puolittunut?*

3.2 Differentiaaliyhtälöiden peruskäsitteitä

Koska ehdon (1) ylempi osa lausuu kahden yhtäsuuruusmerkin eri puolilla olevan funktion identtisyyden, se on siis yhtälö. Tämä poikkeaa kuitenkin esim. matriisiyhtälöistä siten, että sen mahdolliset ratkaisu(t) ei ole lukuja tai vektoreita, vaan funktioita $n(t), t \geq 0$. Koska yhtälö (1) sitoo toisiinsa funktion $n(t)$ ja sen eräitä derivaattoja, sanotaan että kyseessä on *differentiaaliyhtälö*.

Jokainen funktio $n(t)$, joka toteuttaa esimerkkitapauksessamme differentiaaliyhtälön

$$n'(t) - \lambda n(t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{2}$$

on tämän differentiaaliyhtälön *ratkaisu*. Yleisillä differentiaaliyhtälöllä saattaa olla yksi tai useampia, tai ei yhtään ratkaisua. Mitään yleistä menetelmää mielivaltaisen differentiaaliyhtälön tarkan, analyyttisen ratkaisun löytämiselle ei ole[3]. Tarkkoja (esim. alkeisfunktioiden avulla lausuttuja) ratkaisuja voidaan kirjoittaa tiettyjä erikoistyyppejä oleville differentiaaliyhtälöille, tietyillä peruslaskutekniikoilla. Näissäkin tapauksissa ratkaiseminen on usein vaikeaa ja vaatii tottumusta ja hyvää intuitiota.

Differentiaaliyhtälöitä voidaan luokitella useilla eri tavoilla. Differentiaaliyhtälön *kertaluvuksi* sanotaan siinä esiintyvää korkeimman kertaluvun derivaattaa ratkaistavasta funktiosta. (Funktion voidaan sanoa olevan itsensä “nollannen kertaluvun” derivaatta, ilman että suurta väärinkäsityksen vaaraa syntyy.) Yleinen n. kertaluvun differentiaaliyhtälö on (määritelmänsä mukaan) muotoa

$$F\left(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}\right) = 0,$$

jossa $F(t, x, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ on jokin mielivaltainen mutta “siisti”, riittävän monta kertaa derivoituva $(n+2)$ muuttujan reaalifunktio.

Koska differentiaaliyhtälö (2) sisältää ainoastaan lineaarisia kombinaatioita funktion $n(t)$ derivaatoista, mutta ei lainkaan kombinaatioita derivaattojen epälineaarisista funktioista, sanotaan ko. yhtälöä *lineaariseksi*. Jos yhtälö ei ole lineaarinen, niin sanotaan yhtälön olevan – yllättäen – *epälineaarinen*. Lineaarinen n. kertaluvun differentiaaliyhtälö voidaan (määritelmänsä mukaan) saattaa aina muotoon

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1(t)x'(t) + p_0(t)x(t) = r(t), \tag{3}$$

[3]Itseasiassa koko kysymys yleisen, analyyttisen ratkaisumenetelmän olemassaolosta on aika typerä. On helppo kirjoittaa differentiaaliyhtälöitä, joilla on olemassa ratkaisuja joita ei voida kirjoittaa suljetussa muodossa esim. alkeisfunktioiden avulla. Eksoottisia funktioita (esim. fysiikassa) määritellään usein kirjoittamalla differentiaaliyhtälö, jonka yksikäsitteinen ratkaisu ko. funktio on. Kun halutaan tietää sellaisen funktion likimääräinen arvo jossain pisteessä, ratkaistaan differentiaaliyhtälö numeerisesti tietokoneella. Numeerisia, likimääräisiä menetelmiä differentiaaliyhtälöitten ratkaisemiseksi on valtava määrä. Näillä menetelmillä on hyvin tärkeä rooli mm. tekniikan sovellutuksissa.

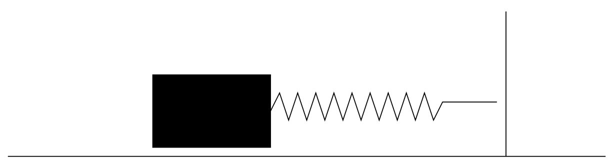
jossa funktiot $p_j(t)$, $j = 0, \cdots, n$ sekä $r(t)$ ovat tunnettuja ja annettuja. Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen on usein aika suoraviivaista, muttei aina. Sensijaan epälineaaristen yhtälöiden ratkaiseminen on lähes poikkeuksetta mutkikasta. Jos yhtälössä (3) kaikki funktiot $p_j(t)$ ovat vakioita (eivät siis riipu argumentistaan t), sanotaan yhtälöä *vakiokertoimiseksi*. Mikäli *kuormitusfunktio* $r(t)$ on nolla kaikilla t, yhtälöä sanotaan *homogeeniseksi*. Muussa tapauksessa yhtälö on luonnollisesti *epähomogeeninen*.

Esimerkki 2. *Radioaktiivisen hajoamislain antama differentiaaliyhtälö* (2) *on* 1. *kertalukua, lineaarinen, homogeeninen ja vakiokertoiminen.*

Hajoamislakitehtävä (1) kokonaisuudessaan on luonteeltaan sellainen, että tehtävän (1) ratkaisu $n(t)$ elää "ajassa" $t \geq 0$, ja alkutilanne $n(0) = n_0$ alkuhetkellä $t = 0$ on tunnettu. Ratkaistavaksi jää myöhemmillä ajanhetkillä $t > 0$ tuntematon $n(t)$, sanotaan tehtävää *alkuarvotehtäväksi*. Ehto $n(0) = n_0$ on *alkuehto*. Hajoamislain lausuva alkuarvotehtävä (1) koostuu siis differentiaaliyhtälöstä (2) sekä *alkuehdosta* $n(0) = n_0$. Tällä kurssilla tarkastelemme ainoastaan alkuarvotehtäviä, vaikka muunkin tyyppisiä differentiaaliyhtälötehtäviä on olemassa.

3.3 Massajousisysteemi

Tarkastellaan seuraavan kuvan mukaista massajousisysteemiä.



Punnus l. massapiste liikkuu kitkattomasti suoralla $\mathbb{R}$, ja se on kiinnitetty toisesta päästä jouseen. Jousi on kiinnitetty seinään siten, että sen venymättömän ja kokoonpuristumattoman pituuden määräämä piste vastaa tilannetta, jolloin massapiste sijaitsee origossa $0 \in \mathbb{R}$. Alkuhetkellä $t = 0$ massapiste sijaitsee etäisyydellä x_0 origosta, jolloin jousi saattaa olla jonkin verran kokoonpuristunut tai venynyt. Tehtävänä on löytää differentiaaliyhtälö massapisteen paikalle $x(t)$, $t \geq 0$.

Newtonin mekaniikasta muistetaan, että kaikkien kappaleeseen vaikuttavien voimain summa $F = \sum_i F_i$ saattaa m-massaisen kappaleen kiihtyvään liikkeeseen, kiihtyvyyden ollessa $a = F/m$. Toisaalta kiihtyvyys on määritelmänsä mukaan nopeuden derivaatta eli etäisyyden toinen derivaatta eli

$$F(t) = mx''(t), \quad t \geq 0.$$

Ideaalisen lineaarisen jousen tapauksessa jousivoima on suoraan verrannollinen jousen venymään tai puristumaan, verrannollisuuskertoimen k ollessa nk. *jousivakio*. Tästä saadaan toinen yhtälö

$$F_{jousi}(t) = -kx(t), \quad t \geq 0.$$

Kaikkien kitkahäviöiden oletetaan olevan merkityksettömiä, ja jousen oma massa oletetaan nollaksi. Tällöin $F(t) = F_{jousi}(t)$ ja saadaan liikeyhtälö massapisteen paikalle $x = x(t)$ alkuarvotehtävänä

$$\begin{cases} x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0, & t \geq 0, \\ x'(0) = v_1, \quad x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4}$$

jossa $v_1, x_0 \in \mathbb{R}$ ovat alkuehdon määrääviä vakioita. (Ratkaisemme tämän differentiaaliyhtälön myöhemmin.) Koska $x'(t) = v(t)$ – massapisteen nopeus – voidaan alkuehto $x'(0) = v_0$ kirjoittaa myös alkunopeuden avulla $v(0) = v_1$.

Kyseessä on selvästi 2. kertaluvun homogeeninen, lineaarinen ja vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö. Monimutkaistetaanpa hieman massajousisysteemin mallia, ja oletaan että kitkasta aiheutuu ylimääräinen, liikkeen suuntaa vastustava voima, joka on suoraan verrannollinen[4] massapisteen senhetkiseen nopeuteen verrannollisuuskertoimella μ. Kitkavoima toteuttaa siis yhtälön

$$F_{kitka}(t) = -\mu x'(t), \quad t \geq 0.$$

Koska jälleen $F(t) = F_{jousi}(t) + F_{kitka}(t)$ aina ja ikuisesti kun $t \geq 0$, saadaan 2. kertaluvun alkuarvotehtävä

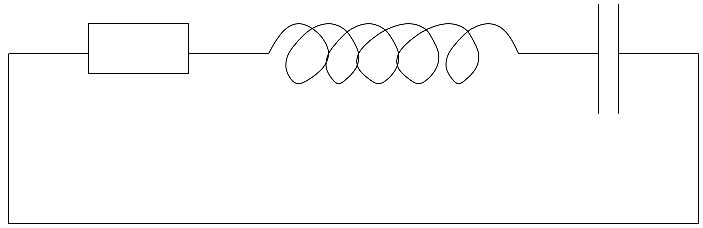
$$\begin{cases} mx''(t) + \mu x'(t) + kx(t) = 0, & t \geq 0, \\ x'(0) = c_0, \quad x(0) = x_0. \end{cases} \tag{5}$$

Huomaa, että yhtälössä kaikki kertoimet m, μ ja k ovat ei-negatiivisia reaalilukuja. Yhtälöä rakennettaessa tähän tuli kiinnittää huomiota, jotta voimien suunnat olisivat mekaanisesti mielekkäitä. Silloin kun näin on, sanotaan sellaisen 2. kertaluvun yhtälön mallintavan *(vaimennettua) harmonista värähtelijää.* Koska harmonisella värähtelijällä on tärkeä rooli fysiikassa ja sovellutuksissa, ratkaisemme tämän differentiaaliyhtälön myöhemmin esimerkkinä. Fysikaalinen intuitio vihjaisi jo nyt, että ratkaisut olisivat luonteeltaan karkeasti sinimuotoisia värähtelyliikkeitä, jotka sammuvat sitä nopeammin mitä suurempi arvo vaimentavalla tekijällä μ on.

[4]Esimerkiksi ilmanvastuksen tapauksessa parempi malli kitkalle olisi olettaa vastustavan voiman suoraan verrannolliseksi nopeuden kolmanteen potenssiin. Tällöin saisimme yhtälön (5) sijasta epälineaarisen differentiaaliyhtälön, jolle tarkan ratkaisun kirjoittaminen olisi kiven alla. Aika usein sovellutuksissa malleihin joudutaan tekemään kompromisseja sitä silmällä pitäen, että ne saadaan kohtuudella ratkaistuakin.

3.4 RLC-piiri

Tarkastellaan seuraavaa suljettua piiriä, jossa on sekä vastus (resistanssi R), kondensaattori (kapasitanssi C) että kela (induktanssi L) sarjaan kytkettyinä.



Oletetaan että piirissä on jollain ilveellä saatu aikaan virta $i(0)$ hetkellä $t = 0$, vaikka piiri ei sisälläkään jännitelähdettä. Tämä onnistuu esimerkiksi lataamalla kondensaattori sopivasti piirin ollessa avoin, ja sulkemalla piiri kytkimellä hetkellä $t = 0$. Haluamme tietää, kuinka piirissä kulkeva virta muuttuu ajan funktiona.

Sähköopista tiedämme, että komponenttien yli aiheutuvat jännitehäviöt toteuttavat eri komponenttien kohdalla yhtälöt

$$(6) \qquad u_R(t) = Ri_R(t), \quad u_L(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t), \quad u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(s)\,ds + u_C(0).$$

Kirchhoffin jännitelain mukaan jokaisen suljetun silmukan yli lasketut jännitehäviöt (miinusmerkkisinä) ja sähkömotoriset voimat (plusmerkkisinä) summautuvat nollaksi: tässä tapauksessa $-u_R(t) - u_L(t) - u_C(t) = 0$, koska piiri ei sisällä jännitelähdettä. Koska jokaisen komponentin läpi menee sama virta, saadaan lisäksi $i_R(t) = i_L(t) = i_C(t) =: i(t)$. Saadaan $-u'_R(t) - u'_L(t) - u'_C(t) = 0$, ja edelleen yhtälöiden (6) avulla piirissä kulkevalle virralle saadaan välttämätön ehto

$$\begin{cases} Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = 0, & t \geq 0. \\ i'(0) = i_1, \quad i(0) = i_0. \end{cases}$$

Alkuehto $i'(0) = i_1$ voitaisiin myös lausua muodossa $u_L(0) = Li_1$. Aivan kuten yhtälössä (5), kaikki vakiot L, R ja $1/C$ ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja. Päättelemme, että virta joutuu samankaltaiseen vaimenevaan värähdysliikkeeseen, kuin poikkeama massajousisysteemissä.

Tapaus $R = 0$ vastaa kitkattoman massajousisysteemin tapausta. Kun $R > 0$, piiristä poistuu energiaa lämpönä, joka johtaa virran vähittäiseen sammumiseen. Kondensaattorin ja kelan aiheuttama puhtaasti reaktiivinen kuorma ei kuluta energiaa, vaan ainoastaan varastoi sitä muuttamalla energiatyypistä toiseen.

4 Lineaarisen, homogeenisen, vakiokertoimisen DY:n ratkaisu

4.1 Karakteristinen polynomi

Tässä luvussa etsitään vakiokertoimisen n. kertaluvun differentiaaliyhtälön

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1 x'(t) + p_0 x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

kaikki ratkaisut. Oletamme jatkossa aina, että differentiaaliyhtälön määrittelevät kertoimet $p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$ ovat reaalilukuja. Kompleksitapauksen käsittely ei oikeastaan olisi sen monimutkaisempaa, mutta tämä olisi turhaa yleisyyttä jota sovellutuksissa ei juurikaan tarvita.

Maalaisjärjellä ajateltuna yhtälön (7) ratkaisujen pitäisi olla aika veikeitä funktioita, koska niiden derivaattojen $x^{(j)}(t)$ tulee jollain tapaa muistuttaa itse alkuperäistä funktiota $x(t)$. Jos niin ei olisi, niin tuskinpa derivaatoista voisi lineaarikombinaatioilla saada aikaan alkuperäisen funktion $x(t)$ monikerran. Toisaalta, on olemassa (vakiokerrointa vaille) täsmälleen yksi funktio, joka on identtinen derivaattansa kanssa – nimittäin eksponenttifunktio. Kokeillaan siis funktiota $x(t) = Ce^{\lambda t}$, jossa C, λ ovat tähän asti tuntemattomia, mahdollisesti kompleksiarvoisia vakioita. Derivoimalla saadaan

$$\frac{d^j}{dt^j} x(t) = C\lambda^j e^{\lambda t},$$

ja sijoittamalla yhtälöön (7)

$$\left(\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0\right) \cdot Ce^{\lambda t} = 0, \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Koska $Ce^{\lambda t} \neq 0$ kaikilla $t \geq 0$ jos $C \neq 0$, saadaan polynomiyhtälö

$$P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} p_j \lambda^j = 0. \tag{9}$$

Polynomia $P(\lambda)$ kutsutaan differentiaaliyhtälön (7) *karakteristiseksi polynomiksi*. Algebran peruslauseen nojalla tiedetään, että jokaisella n. asteen polynomiyhtälöllä on täsmälleen n kappaletta mahdollisesti kompleksiarvoisia juuria, joista osa saattaa olla keskenään yhtäsuuria. Merkittäköön siis yhtälön (9) juuria symboleilla $\lambda_j, 1 \leq j \leq n$.

Esimerkki 3. *Polynomiyhtälöllä $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ on kaksi juurta $\lambda_1 = \lambda_2$. Nämä juuret ovat kuitenkin molemmat $= 1$. Joskus sanotaan, että juuren λ_1 kertaluku on 2.*

Fysiikasta tulevilla differentiaaliyhtälöillä polynomiyhtälön (9) kaikki kertoimet p_j ovat useimmiten reaalisia. Tällöin mahdolliset kompleksilukujuuret esiintyvät aina pareittain – kompleksisen juuren kompleksikonjugaattiluku on myös juuri. Toisen asteen yhtälön tapauksessa tämä on nähtävissä suoraan ratkaisukaavasta.[5] Korkeampiasteisessa tapauksessa huomataan, että kaavasta (9) saadaan konjugoinnin laskusääntöjä käyttämällä

$$\overline{P(\lambda)} = (\overline{\lambda})^n + \sum_{j=0}^{n-1} \overline{p_j} (\overline{\lambda})^j = 0.$$

Mutta jos kaikki kertoimet p_j ovat reaalisia, niin silloin $\overline{p_j} = p_j$ ja edellinen yhtälö antaa $P(\overline{\lambda}) = \overline{P(\lambda)} = 0$. Niinpä myös $\overline{\lambda}$ on nollakohta, mikä oli toteen näytettävä. Itse asiassa hetken miettimällä huomaa, että sellaisten nollakohtien λ ja $\overline{\lambda}$ kertaluvutkin ovat samoja.

4.2 Erisuurten juurten tapaus

Mikäli kaikki karakteristisen polynomiyhtälön (9) juuret $\lambda_j, 1 \leq j \leq n$, ovat keskenään erisuuria, olemme löytäneet n kpl toisistaan poikkeavaa ratkaisua funktioina

$$\phi_j(t) = e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Koska differentiaaliyhtälö (7) on lineaarinen, on ihan helppo tarkistaa, että kaikki näiden ratkaisujen lineaariset kombinaatiot

$$\Phi(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j t}$$

ovat myös ratkaisuja, mielivaltaisilla vakioitten $C_j \in \mathbb{C}$ arvoilla.[6]

Esimerkki 4. *Tarkista laskemalla, että edellinen väite pitää paikkaansa.*

Olemme saaneet aikaiseksi suuren joukon ratkaisuja differentiaaliyhtälölle, vaihtelemalla vakioita C_j edellä kirjoitetussa summalausekkeessa. Herää kysymys, josko summalausekkeesta voitaisiin poistaa termejä ilman, että lineaarikombinoimalla saavutettujen ratkaisujen joukko pienenisi. Erisuurten juurten tapauksessa tämä ei onnistu, koska ratkaisut $\phi_j(t) = e^{\lambda jt}$ ovat lineaarisesti riippumattomia seuraavan määritelmän mielessä:

Määritelmä 5. *Sanotaan, että funktiot $\phi_j, j = 1, \cdots, n$, ovat lineaarisesti riippumattomia (tai vapaita), jos (ja vain jos) joillain vakioilla $C'_j \in \mathbb{C}, j = 1, \cdots, n$, muodostettu lineaarikombinaatio häviää*

$$\sum_{j=1}^{n} C'_j \phi_j(t) = 0 \quad \textit{kaikilla} \quad t \in \mathbb{R},$$

ainoastaan mikäli kaikki kerroinvakiot häviävät: $C'_j = 0$ kaikilla $j = 1, \cdots, n$.

Mikäli funktiot eivät ole lineaarisesti riippumattomia, sanotaan että ne ovat tällöin lineaarisesti riippuvia (tai sidottuja).

[5] Polynomiyhtälölle on olemassa "ainoastaan alkeisfunktioita käsittävä" yleinen ratkaisukaava ainoastaan polynomin astelukuun 4 asti. Yleisen viidennen asteen polynomiyhtälön juurien lausumisen alkeisfunktioiden avulla osoitti mahdottomaksi norjalainen matematiikko N. Abel (1802-1829). Likimääräisesti voidaan tietenkin mikä tahansa polynomiyhtälö ratkaista kuinka tarkasti tahansa.

[6] Myöhemmin luvussa 4.5 huomataan, että ei voida olettaa vakioiden C_j olevan reaalilukuja. Niin ei edes siinäkään tapauksessa, että olisimme kiinnostuneita pelkästään yhtälön reaalifunktioratkaisuista.

Selvästi kyseessä on täsmälleen sama asia kuin vektoreiden lineaarinen riippumattomuus, jota on käsitelty vektorilaskennan ja matriisilaskun yhteydessä. Itseasiassa C^1-funktiotkin ovat vektoreita, sillä niitä tavanomaisesti yhteenlaskemalla ja vakioilla kertomalla saadaan edelleen funktioita. Todellakin, jos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ niin on tapana määritellä $\alpha f + \beta g \in C^1(\mathbb{R})$ kaavalla

$$(\alpha f + \beta g)(t) = \alpha f(t) + \beta g(t) \quad \text{kaikilla} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vaatimuksena on luonnollisesti se, että ko. funktioiden määrittelyjoukot ovat samoja — muutoin funktioita on paha mennä laskemaan yhteen.

Esimerkki 6. *Osoita, että $e^{\lambda_1 t}$ ja $e^{\lambda_2 t}$ ovat lineaarisesti riippumattomia jos $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Osoita, että ne ovat lineaarisesti riippuvia mikäli $\lambda_1 = \lambda_2$. Osaatko todistaa analogisen väitteen useamman eksponenttifunktion tapauksessa?*

4.3 Moninkertaisten juurten tapaus

Tarkastellaan edelleen n. kertaluvun differentiaaliyhtälöä (7) ja sen karakteristisen polynomin $P(\lambda)$ nollakohtia λ_j. Olkoon m, $m \leq n$, toisistaan poikkeavien nollakohtien lukumäärä. Voimme olettaa, tarvittaessa nollakohtien numerointia muuttamalla, että nimenomaan m *ensimmäistä* juurta jonossa

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \cdots, \lambda_m$$

ovat kaikki keskenään erisuuria, ja loput juurista esiintyy jonossa jo aikaisemmin.

Siinä tapauksessa, että karakteristisen yhtälön juurista $\lambda_j, 1 \leq j \leq n$, kaksi tai useampi ovat keskenään yhtäsuuria, emme voi muodostaa n kpl lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja edellisen tarkastelun nojalla. Löydämme pelkästään m kpl ($m < n$) lineaarisesti vapaita ratkaisuja, jossa m on toisistaan poikkeavien juurten lukumäärä. Tarvitsemme kuitenkin jatkossa täsmälleen n kpl lineaarisesti vapaita ratkaisuja, joten jostain täytyy repiä ne puuttuvat $n - m$ ratkaisua.

Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi toisen kertaluvun tapausta $x'' + px' + qx = 0$, jonka karakteristinen polynomiyhtälö on muotoa

$$P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Olemme kiinnostuneet tapauksesta, jossa $\lambda_1 = \lambda_2$, mutta tutkitaan tapausta jossa $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta$, ja annetaan pikkuhiljaa $\Delta \to 0$. Niin kauan kuin $\Delta \neq 0$, sekä $e^{\lambda_1 t}$ ja $e^{(\lambda_1 + \Delta)t}$ ovat (aiemmin todetun nojalla) lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja eräälle toisen kertaluvun yhtälölle

$$x''(t) + p_\Delta x'(t) + q_\Delta x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

jonka kertoimet p_Δ ja q_Δ siis riippuvat luvusta Δ. Lineaarisuuden perusteella ratkaisujen erotusosamäärä

$$\phi_\Delta(t) = \frac{e^{(\lambda_1 + \Delta)t} - e^{\lambda_1 t}}{\Delta}$$

on myös yhtälön (10) ratkaisu. Jos maailmassa on lainkaan oikeudenmukainen paikka, [7] niin voimme antaa $\Delta \to 0$, ja saatu raja-arvofunktio (kullakin kiinteänä pidetyllä t:llä)

$$\lim_{\Delta \to 0} \phi_\Delta(t) = \frac{d}{d\lambda_1} e^{\lambda_1 t} = t e^{\lambda_1 t}$$

on toivottavasti sen differentiaaliyhtälön ratkaisu, jota vastaa rajatapaus $\Delta = 0$ ja kaksinkertainen juuri $\lambda_1 = \lambda_2$. (Muista derivaatan määritelmä ja ketjusääntö lukiessasi edellistä kaavaa!)

Olemme siis keksineet rajankäynnin avulla, että kaksinkertaisen (reaalisen) juuren $\lambda_1 = \lambda_2$ tapauksessa funktiot

$$\phi_{1,1}(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \phi_{1,2}(t) = t e^{\lambda_1 t},$$

ovat hyviä kandidaatteja lineaarisesti vapaiksi ratkaisuiksi toisen kertaluvun yhtälölle

$$x''(t) - 2\lambda_1 x'(t) + \lambda_1^2 x(t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{11}$$

jonka karakteristisen polynomin kaksinkertainen juuri λ_1 on.

Esimerkki 7. *Osoita, että yllä määritellyt funktiot $\phi_{1,1}$, $\phi_{1,2}$ todellakin ovat keskenään lineaarisesti vapaita, ja molemmat ratkaisevat yhtälön* (11)*.*

4.4 Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu

Edellisessä jaksossa tarkastelimme toisen kertaluvun yhtälön tapauksessa ongelmia, joita aiheutuu karakteristisen polynomin moninkertaisista nollakohdista. Itseasiassa korkeampien kertalukujen tapauksessa saadaan aivan analoginen tulos, jonka annamme seuraavassa tarkemmin perustelematta.

Lause 8. *Oletetaan, että karakteristisella polynomiyhtälöllä* (9) *on m kpl ($m \leq n$) erisuuria juuria (l. karakteristisen polynomin nollakohtia), joita merkittäköön λ_j, jossa $j = 1, \cdots, m$. Merkittäköön juuren λ_j kertalukua luvulla n_j, $1 \leq n_j \leq n$, jossa $j = 1, \cdots, m$.*

Muodostetaan jokaista juurta λ_j kohden n_j kpl funktioita

$$\phi_{j,1}(t) = e^{\lambda_j t}, \quad \phi_{j,2}(t) = t e^{\lambda_j t}, \quad \cdots, \quad \phi_{j,n_j}(t) = t^{n_j - 1} e^{\lambda_j t}.$$

Tällöin

(i) funktioita $\phi_{j,k}$ on tasan n kpl, jossa indeksit ovat $1 \leq j \leq m$ sekä $1 \leq k \leq n_j$,

(ii) ne ovat toisistaan lineaarisesti riippumattomia, ja

(iii) ne ovat ratkaisuja differentiaaliyhtälölle (7)*.*

[7] ...ja kaikista mahdollisista maailmoista parhaimpana sehän tietenkin on... mutta sen toteamiseen tarvitsisimme ϵ-δ-todistuksen... joten se siitä oikeudenmukaisuudesta.

Todistuksen pääpiirteet. Väite (i) seuraa siitä faktasta (algebran peruslause), että n asteen polynomilla on aina n kpl juuria kompleksitasossa, moninkertaiset juuret laskettuna kertalukunsa mukaan. Väite (ii) pitäisi todistaa täydellisellä induktiolla tai vaihtoehtoisesti laskemalla nk. Wronskin determinantti, josta on puhe Kreyszigin kirjassa. Viimeinen väite (iii) todistetaan derivoimalla sanottuja funktioita kuin pieni apina, ja sitten sijoittamalla differentiaaliyhtälöön. Kaikki yksityiskohdat sivuutetaan, ja innostunutta lukijaa kehoitetaan katsomaan ja laskemaan esim. kirjasta Kreyszig: Adv. Eng. Math., 8 Ed., sivut 124 – 137. □

Jatkossa käytämme seuraavia nimityksiä differentiaaliyhtälön ratkaisukäsitteille:

Määritelmä 9. *Olkoon funktiot* $\phi_{j,k}, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n_j$ *kuten Lauseessa 8. Tällöin* n *kpl parametreista* $C_{j,k} \in \mathbb{C}$ *riippuvaa lauseketta*

$$x_Y(C_{1,1}, C_{1,2} \cdots C_{k,n_k}; t) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m, \\ 1 \leq k \leq n_j}} C_{j,k}\phi_{j,k}(t) \tag{12}$$

kutsutaan differentiaaliyhtälön (7) yleiseksi ratkaisuksi.

Valittaessa kiinteät arvot vakioille $C_{j,k}$ *(esim. alkuehtojen perusteella) saadaan eräs yhtälön* yksityis- eli partikulaariratkaisu.

Voidaan siis sanoa, että n. kertaluvun lineaarisen vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön (7) kaikki (yksityis)ratkaisut muodostavat n kertaa derivoituvien funktioiden $C^n(\mathbb{R})$ vektoriavaruuden erään n-ulotteisen aliavaruuden.

Differentiaaliyhtälön (7) yleisen ratkaisun idea on siinä, että itseasiassa *jokainen* ratkaisu voidaan ilmaista yleisen ratkaisun avulla, valitsemalla vain sopivasti arvot vakioille $C_{j,k}$, joita on n kpl. Kaikki edellä koetut kärsimykset n lineaarisesti vapaan ratkaisun löytämiseksi saavat palkintonsa täällä, koska yhtään vähempi määrä ratkaisuja ei olisi riittänyt n kertaluvun yhtälölle. Juhlallisemmin:

Lause 10. *Olkoon* $x(t)$ *yhtälön* (7) *jokin ratkaisu. Tällöin*

$$x(t) = x_Y(C_{1,1}, C_{1,2} \cdots C_{k,n_k}; t)$$

eräälle yksikäsitteisesti määrätylle joukolle vakioita $C_{j,k} \in \mathbb{C}$.

Todistus. Sivuutetaan näillä luennoilla, mutta sen löytää vaikkapa Kreyszigin kirjasta. □

4.5 Konjugaattiparien yhdistely trigonometrisiksi funktioiksi

Tarkastellaan 2. kertaluvun vakiokertoimista differentiaaliyhtälöä

$$x''(t) - 2x'(t) + 3x(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Karakteristisen polynomin $P(\lambda)$ nollakohdiksi saadaan $\lambda_1 = 1+i\sqrt{2}$ ja $\lambda_1 = 1-i\sqrt{2}$, jotka ovat toistensa kompleksikonjugaatteja. Määritelmän 9 yleinen ratkaisu tälle yhtälölle on siis funktioperhe

$$x_Y(C_1, C_2; t) = C_1 e^{\left(1+i\sqrt{2}\right)t} + C_2 e^{\left(1-i\sqrt{2}\right)t}, \quad t \geq 0, \tag{13}$$

joka funktioperhe on siis parametrisoitu kahdella vapaasti valitulla parametrilla $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Tämä on kuitenkin hieman kömpelö tapa lausua ratkaisu, koska imaginaarieksponenttifunktioista ei suoraan näe ratkaisujen muotoa tai sitä, milloin yksityisratkaisut ovat reaaliarvoisia funktioita. Käyttämällä kompleksiluvuista tuttuja Eulerin kaavoja

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \\ \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta, \end{cases}$$

saadaan yhtälön yleinen ratkaisu muotoon

$$x_Y(C_1', C_2'; t) = e^t\left(C_1 e^{i\sqrt{2}t} + C_2 e^{-i\sqrt{2}t}\right) = e^t\left(C_1' \cos\sqrt{2}t + C_2' \sin\sqrt{2}t\right), \quad t \geq 0, \tag{14}$$

jossa $C_1' = C_1 + C_2$, $C_2' = i\left(C_1 - C_2\right) \in \mathbb{C}$ ovat jälleen vapaasti valittavia parametreja. Yhtälön (13) yleinen ratkaisu antaa perheen funktioita, jotka kaikki ovat eksponentiaalisesti kasvavien siniværähtelyiden summia. Siinä tapauksessa, että juurten λ_1, λ_2 reaaliosat olisivat olleet negatiivisia, olisivat värähtelyt olleet eksponentiaalisella nopeudella vaimenevia. Huomaa lisäksi, että karakteristisen yhtälön juurten imaginääriosat määräävät värähtelyitten taajuudet.

Huomaa, että yleisen ratkaisu $x_Y(C_1', C_2'; t)$ antaa **reaaliarvoisia** funktioita täsmälleen silloin, kun kertoimet C_1' ja C_2' trigonometrisessa muodossa (14) reaalisia — ovathan sin ja cos reaaliarvoisia funktioita. Jotta tämä saavutetaan, ovat vastaavat vapaat parametrit C_1 ja C_2 alkuperäisessä yleisen ratkaisun eksponenttimuodossa (13) aidosti kompleksisia. Yleensä olemme sovellutuksissa kiinnostuneita nimenomaan reaaliarvoisista ratkaisuista, joten trigonometrinen esitystapa on tässä mielessä edullisempi.[8]

Kaikki nämä tarkastelut yleistyvät n. kertaluvun differentiaaliyhtälöihin ja niiden konjugaattijuuripareihin. Yleensä on tapana yhdistellä konjugaattieksponentit trigonometrisiksi funktioiksi, koska niin saatua ratkaisun muotoa pidetään “sievempänä”.

Esimerkki 11. *Totea, että 2. kertaluvun homogeenisen yhtälön tapauksessa karakteristisen polynomin konjugaattijuuripari $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$ antaa yleiseksi ratkaisuksi*

$$x_Y(C_1, C_2; t) = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t\right),$$

jossa $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ ovat parametreja. Jos halutaan vain raaliarvoisia ratkaisuja, tulee parametrien toteuttaa $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

[8] Jos halutaan reaalisia ratkaisuja siinä tapauksessa, että nollakohta λ_j on reaalinen, tulee vain valita vastaavien funktioiden $\phi_{j,k}(t) = t^k e^{\lambda_j t}$ kertoimet $C_{j,k}$ yleisen ratkaisun lausekkeessa reaalisiksi.

4.6 n. kertaluvun alkuarvotehtävä

Käytännössä olemme varsin harvoin kiinnostuneita differentiaaliyhtälön (7) kaikista ratkaisuista, vaan jostain erityisestä ratkaisusta. Tällöin tehtävää on jollain tapaa rajoitettu lisäehdolla, joka poimii yleisen ratkaisun lausekkeesta esille jonkin erityisen ratkaisun kiinnittämällä parametrit $C_{j,k}$ joiksikin kiinteiksi vakioiksi. Tämä tapahtuu esim. silloin, kun pelkän differentiaaliyhtälön (7) sijasta haluamme ratkaista *n. kertaluvun alkuarvotehtävän*

$$
\begin{cases} x^{(n)}(t) + p_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1 x'(t) + p_0 x(t) = 0, \quad t \geq 0, \\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}, \quad x^{(n-2)}(0) = x_{n-2}, \quad \cdots \quad x^{(1)}(0) = x_1, \quad x(0) = x_0. \end{cases} \tag{15}
$$

Edellä annetut n kpl reaalilukuvakioita $x_0, \cdots, x_{n-1}$ ovat *alkuarvoja*, ja ne antavat funktion derivaatoille n kpl yhtälöitä — *alkuehtoja*. Alkuarvotehtävän ratkaisun tulee siis toteuttaa sekä differentiaaliyhtälö positiivisilla ajanhetkillä $t \geq 0$ ja sen lisäksi vielä alkuehdot alkuhetkellä $t = 0$.

Alkuarvotehtävän ratkaisu tapahtuu etsimällä ensin tehtävän yleinen ratkaisu

$$x_Y(C_{1,1}, \cdots, C_{k,n_k}; t)$$

määritelmän 9 mielessä. Sitten lasketaan yleisen ratkaisun n alinta derivaattaa ja vaaditaan jokaiselta derivaatalta, että sitä vastaava alkuehto toteutuu alkuhetkellä $t = 0$. Viime kädessä päädytään n:n muuttujan ja n:n lineaarisen yhtälön ryhmään, josta voidaan yksikäsitteisesti ratkaista arvot n kpl tuntemattomille parametreille $C_{j,k}$. Eksplisiittisiä kaavoja ei kannata kirjoittaa yleiselle tapaukselle, koska ne olisivat tolkuttoman rumia ja teknillisiä. Innokas derivoija kyllä sellaisetkin jaksaisi kirjoittaa, mutta idean ymmärtäminen on meille tärkeämpää.

Esimerkin vuoksi ratkaisemme tällä tavalla seuraavaksi 2. kertaluvun lineaarisen alkuarvotehtävän

$$
\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 3x(t) = 0, \quad t \geq 0 \\ x'(0) = 1, \quad x(0) = 2. \end{cases} \tag{16}
$$

Differentiaaliyhtälön $x'' - 2x' + 3x = 0$ yleinen ratkaisu edellisen kappaleen perusteella on (trigonometristen funktioiden avulla annettuna) muotoa

$$x_Y(t) = x_Y(C_1', C_2'; t) = e^t \left(C_1' \cos \sqrt{2}t + C_2' \sin \sqrt{2}t \right), \quad t \geq 0.$$

Tällöin $x_Y(0) = C_1'$ ja derivoimalla

$$x_Y'(t) = e^t \left(\left(C_1' + \sqrt{2}C_2' \right) \cos \sqrt{2}t + \left(C_2' - \sqrt{2}C_1' \right) \sin \sqrt{2}t \right)$$

josta sijoittamalla $t = 0$ saadaan toinen yhtälö $x_Y'(0) = C_1' + \sqrt{2}C_2'$. Käyttämällä alkuehtoja, saadaan 2×2 matriisiyhtälö

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

joista kääntämällä matriisi saadaan ekvivalentti yhtälö

$$\begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Alkuarvotehtävän (16) yksikäsitteinen ratkaisu on siis

$$x(t) = e^t \left(2\cos\sqrt{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}t \right), \quad t \geq 0.$$

Toisen kertaluvun yhtälön tapauksessa päädyttiin siis 2×2-matriisiyhtälön tapaukseen, joka voitaisiin käsitellä aivan hyvin tavallisena lineaarisena yhtälöparina. Koko matriisien esiintuominen tässä esimerkissä onkin hieman kuin ampuisi kärpästä tykillä. Silloin kun differentiaaliyhtälön kertaluku on korkea, tulee matriisiformulaatiosta huomattavasti kätevämpi, varsinkin kun tarvittava yhtälöryhmän ratkaiseminen (eli matriisin kääntäminen) tehdään yleensä tietokoneella.

4.7 Vaimennettu värähtelijä

Ratkaisemme seuraavassa vaimennetun harmonisen värähtelijän alkuarvotehtävän (5). Differentiaaliyhtälön

$$mx''(t) + \mu x'(t) + kx(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

karakteristinen polynomi on

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\mu}{m}\lambda + \frac{k}{m} = \left(\lambda + \frac{\mu}{2m}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}\right).$$

Ei liene kovin yllättävää, että lausekkeen $\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}$ etumerkillä on olennainen merkitys alkuarvotehtävän ratkaisujen luonteelle. Mikäli $\frac{k}{m} > \frac{\mu^2}{4m^2}$, karakteristisen yhtälön juuret ovat ei-reaalisia konjugaattilukuja, muussa tapauksessa juuret ovat reaalilukuja. Koska termi $\frac{\mu^2}{4m^2}$ mittaa vaimentavan tekijän suuruutta, sanotaan tapauksia

$$\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2} < 0, \quad \frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2} = 0, \quad \frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2} > 0,$$

ylivaimennetuksi, kriittisesti vaimennetuksi ja alivaimennetuksi tapaukseksi.

Alivaimennettu tapaus on olennaisesti sama mitä tutkimme alkuarvotehtävässä (16). Saadaanhan Eulerin kaavojen avulla saadaan differentiaaliyhtälön yleiselle ratkaisulle lauseke

$$x_Y(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t} \left(C_1 \cos t\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}} + C_2 \sin t\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}} \right),$$

jossa vakiot $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ tulee määrätä alkuehdoista.

Tarkastellaan seuraavassa kriittisesti vaimennettua tapausta. Tällöin karakteristisen polynomiyhtälön juuret ovat yhtäsuuria

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\mu}{2m},$$

ja differentiaaliyhtälön yleiseksi ratkaisuksi derivaattoineen saadaan

$$\begin{aligned} x_Y(t) &= (C_1 + C_2 t)\, e^{-\frac{\mu}{2m}t} \\ x_Y'(t) &= \Big((-C_1\frac{\mu}{2m} + C_2) - C_2\frac{\mu}{2m}t\Big)\, e^{-\frac{\mu}{2m}t}. \end{aligned}$$

Tästä saadaan yhtälöt

$$x_Y(0) = C_1, \quad x_Y'(0) = C_2 - C_1\frac{\mu}{2m}.$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu saadaan nyt ratkaisemalla tuntemattomat vakiot C_1 ja C_2 yhtälöstä

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\mu}{2m} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix},$$

minkä jätämme lukijalle harjoitustehtäväksi.

Esimerkki 12. *Ratkaise harmonisen värähtelijän yhtälö ylivaimennetussa tapauksessa.*

5 Epähomogeeninen differentiaaliyhtälö

5.1 Kuormitettu massajousisysteemi

Luvussa 3.3 johdimme differentiaaliyhtälön (4) pelkän jousivoiman $F_{jousi}(t) = -kx(t)$ vaikutuksessa olevalla massapisteelle. Tarkastelemme nyt yleisempää tapausta, jossa massapisteeseen vaikuttaa jousivoiman lisäksi myös eräs ajasta riippuva, jousivoiman kanssa yhdensuuntainen tai vastakkaisuuntainen (esimerkiksi tuulesta aiheutuva) kuormittava voima $F_{kuorma}(t)$.

Kuten aikaisemmin jo todettiin, kaikkien kappaleeseen vaikuttavien voimain summa $F = \sum_i F_i$ saattaa m-massaisen kappaleesen kiihtyvään liikkeeseen, kiihtyvyyden ollessa $a = \frac{d^2x}{dt^2} = F/m$. Tätä soveltamalla kuormitetun massajousisysteemin tapauksessa saadaan siis

$$mx''(t) = F_{jousi}(t) + F_{kuorma}(t) = -kx(t) + F_{kuorma}(t),$$

jossa kuormittavan voiman etumerkki katsotaan positiiviseksi silloin kun se pyrkii siirtämään massapisteen paikkaa $x(t)$ kohti $+\infty$:ä. Tällöin alkuarvotehtävän (4) sijasta saadaan alkuarvotehtävä

$$(17) \qquad \begin{cases} mx''(t) + kx(t) = F_{kuorma}(t), & t \geq 0, \\ x'(0) = v_1, \quad x(0) = x_0, \end{cases}$$

jossa $v_1, x_0 \in \mathbb{R}$ ovat alkuehdot määräävià annettuja vakioita. On ollut vanhastaan tapana kirjoittaa differentiaaliyhtälöt siten, että nk. *kuormatermi* tulee yhtälön oikealle puolelle, kun taas derivaattoja sisältävät termit tulevat vasemmalle puolelle.

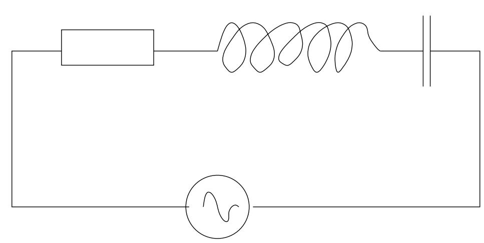
Mikäli mukaan otetaan myös nopeuteen verrannollinen kitkavoimatermi $F_{kitka}(t) = -\mu x'(t)$, saadaan kuormitetun massajousisysteemin liikeyhtälöiksi täsmälleen samalla tavalla kuin edellä

$$\begin{cases} mx''(t) + \mu x'(t) + kx(t) = F_{kuorma}(t), \quad t \geq 0, \\ x'(0) = x_1, \quad x(0) = x_0. \end{cases} \tag{18}$$

Lukijan on syytä oppia tässä vaiheessa se tärkeä läksy, että differentiaaliyhtälöitten eri termit voidaan usein tulkita esittävän eri fysikaalisista ilmiöistä kuten kitka, jousivoima, kuorma, jne.. Tällainen kvalitatiivinen tarkastelu usein auttaa ymmärtämään mistä differentiaaliyhtälössä on kysymys, ja kuinka sen ratkaisu(je)n voisi olettaa käyttäytyvän maalaisjärjen valossa. Matemaattisilla tarkasteluilla pyritään usein vain tarkemmin formuloimaan ja todistamaan se, mikä suurinpiirein nähdään suoraan yhtälöstä.

5.2 Kuormitettu RLC-piiri

Massajousisysteemille täysin analoginen tarkastelu voidaan tehdä Luvussa 3.4 tarkastellun RLC-piirin suhteen, mikäli piiriin lisätään ajasta riippuva jännitelähde $e(t)$. Tällöin piirikaavio on seuraavan kaltainen



Kuten jo aikaisemmin mainitsimme, jokaisen suljetun silmukan yli lasketut jännitehäviöt (miinusmerkkisinä) ja sähkömotoriset voimat l. jännitelähteet (plusmerkkisinä) summautuvat nollaksi: tässä tapauksessa $-u_R(t) - u_L(t) - u_C(t) + e(t) = 0$. Etenemällä täsmälleen samoin kuin luvussa 3.4, saadaan piirissä kulkevalle virralle alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = e'(t), \quad t \geq 0, \\ i'(0) = i_1, \quad i(0) = i_0. \end{cases}$$

Valitsemalla eri aaltomuotoja jännitteelle $e(t)$ voidaan siis laskea kuinka “piiri potkaisee takaisin”.

5.3 1. kertaluvun epähomogeenisten yhtälöiden yleinen ratkaisu

Olemme edellä antaneet kaksi fysikaalista esimerkkiä, joiden malleiksi löydettiin 2. kertaluvun epähomogeeninen differentiaaliyhtälö. Siirrymme seuraavaksi tarkastelemaan kuinka tällaisia yhtälöitä ratkaistaan.

Yksinkertaisuuden vuoksi aloitamme tarkastelut 1. kertaluvun alkuarvotehtävästä

$$\begin{cases} x'(t) - ax(t) = f(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{19}$$

jossa kuormatermi on jokin jatkuva funktio $f \in C(\mathbb{R}_+)$.[9] Homogeenisessa tapauksessa $f(t) = 0$ saataisiin yhtälön yleiseksi ratkaisuksi

$$x_Y(C;t) = Ce^{at}, \quad t \geq 0 \tag{20}$$

missä parametri $C \in \mathbb{C}$ olisi mielivaltainen. Yritämme sopivasti muunnella tätä ratkaisua niin, että sen sijaan yhtälö $x'(t) - ax(t) = f(t)$ toteutuisi kun $t \geq 0$. Kokeilemme, voisimmeko löytää sellaisen funktion $C(t)$, jotta korvattaessa vakio C yhtälössä (20) funktiolla $C(t)$ antaisikin epähomogeenisen yhtälön ratkaisun Ansatzin[10] $x(t) = C(t)e^{at}$ muodossa. Tulon derivointisäännöllä

$$x'(t) = C'(t)e^{at} + aC(t)e^{at}, \quad t \geq 0,$$

josta suoraan

$$x'(t) - ax(t) = C'(t)e^{at} + aC(t)e^{at} - aC(t)e^{at} = C'(t)e^{at}.$$

Tämä näyttää jossain määrin lupaavalta, koska yhtälön oikealla puolella tapahtuu kahden termin supistuminen pois. Jäljelle jää vain tarve valita funktio $C(t)$ siten, että

$$f(t) = C'(t)e^{at} \Leftrightarrow C'(t) = e^{-at}f(t)$$

kaikilla $t \geq 0$. Integroimalla saadaan

$$C(t) - C(0) = \int_0^t e^{-av} f(v)\, dv,$$

[9] Kirjoitamme tässä luvulle $a \in \mathbb{R}$:lle negatiivisen etumerkin pelkästään siksi, että se tällöin muistuttaa hajoamislain differentiaaliyhtälöä. Fysikaalinen tulkinta epähomogeeniselle hajoamislaille on se, että jokin (funktiolla f mallinnettava) ulkoinen vaikutus nopeuttaa tai hidastaa hajoamista kullakin ajan hetkellä. Voitaisiin esim. ajatella, että radioaktiivista kappaletta säteilytettäisiin hiukkasilla, jotka lisäävät hajoamisreaktioita verrattuna luonnolliseen hajoamisnopeuteen. Vakuutu itseksesi, että tämä tulkinta on järkevä!

[10] Ansatz on ylevä, saksalaisperäinen nimitys yleisluontoiselle veikkaukselle tai työhypoteesille. Suomeksi voitaisiin käyttää vaikkapa sanaa yrite. Valitettavasti usein Ansatz ei ole lainkaan parempi kuin villi arvaus, joka osoittautuu toimimattomaksi.

josta sijoittamalla alkuperäiseen Ansatziin

$$x(t) = e^{at}C(0) + e^{at}\int_0^t e^{-av} f(v)\,dv = e^{at}C(0) + \int_0^t e^{a(t-v)} f(v)\,dv.$$

Tämä on siis epähomogeenisen differentiaaliyhtälön *yleinen ratkaisu*, olipa vakiotekijä $C(0) \in \mathbb{C}$ mitä tahansa. Laskemalla huomataan, että $x(0) = C(0)$, joten alkuehdon $x(0) = x_0$ määräämässä *yksityisratkaisussa* tulee integroimisvakio valita $C(0) = x_0$. Olemme siis todistaneet

Lause 13. *Epähomogeenisen, vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön alkuarvotehtävän* (19) *yksikäsitteinen ratkaisu $x(t)$, $t \geq 0$, saadaan nk.* vakionvariointikaavan

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-v)} f(v)\,dv \tag{21}$$

avulla.

Huomaa, ettei tehty analyysi muutu lainkaan, vaikka a olisi kompleksiluku — kompleksiluvuilla lasketaan todellakin aivan samalla tavalla kuin reaaliluvuilla.

Huomautamme myös, että mikäli tehtävässä (19) vakio a olisikin ollut muuttujasta t riippuva funktio $a(t)$, olisi ratkaisu löydetty olennaisesti aivan samalla tavalla. Tällöin saadusta kaavasta olisi tullut jonkin verran monimutkaisempi (sisältäisi mm. pari integroimismerkkiä). Haluttu ratkaisumenettely ja kaava löytyvät esim. kirjasta Kreyszig: Adv. Eng. Math., 8 Ed., s. 34.

Huomaa lisäksi, että vakionvariointikaava (21) sisältää erään integraalifunktion. Joissain tapauksissa integraalifunktio voidaan laskea auki ja lausua esim. alkeisfunktioiden avulla. Toisissa tapauksissa tämä ei ole mahdollista, vaan ratkaisuprosessi jää tältä osin puolitiehen — erään integraalin avulla lausutuksi. Integraalin arvo kullakin $t \geq 0$ voidaan toki laskea tarvittaessa mielivaltaisen tarkasti tietokoneella.

5.4 n. kertaluvun epähomogeenisten yhtälöiden yleinen ratkaisu

Siirrymme tarkastelemaan 2. kertaluvun vakiokertoimista, epähomogeenista yhtälöä

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t), \quad t \geq 0, \tag{22}$$

ja siihen liittyviä alkuarvotehtäviä. Oletamme taas, että $f(t)$ on jatkuva, joukossa $\mathbb{R}_+$ määritelty reaaliarvoinen funktio. Luvussa 5.3 johdimme nk. vakionvariointikaavan (21) vastaavan 1. kertaluvun tehtävän ratkaisuksi. Toisen kertaluvun tehtävän kanssa emme vielä esitä mitään valmiita kaavoja. [11] Sen sijaan tarkastelemme seuraavaksi tekniikoita, joilla tehtävä voidaan sopivilla Ansatzeilla suotuisissa olosuhteissa ratkaista suhteellisen kivuttomasti.

Aloitamme osoittamalla, että epähomogeenisen yhtälön (22) "yleinen" ratkaisu voidaan aina esittää vastaavan homogeenisen yhtälön

$$x_h''(t) + a x_h'(t) + b x_h(t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{23}$$

aiemmin määritellyn nk. yleisen ratkaisun[12] avulla, kunhan homogeeniyhtälön yleiseen ratkaisuun lisätään jokin epähomogeenisen yhtälön yksityisratkaisu. Kyseessä on täsmälleen sama asia, joka esitettiin matriisilaskun yhteydessä; epähomogeenisen lineaarisen yhtälöryhmän kaikkien ratkaisujen esittämisestä homogeeniyhtälöryhmän ratkaisujen avulla (katso Kreyszig: Adv. Eng. Math., 8 Ed., sivu 341). Muodollisemmin n. kertaluvun yhtälön tapauksessakin pätee:

Lause 14. *Kertaluvun n epähomogeenisen yhtälön*

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1 x'(t) + p_0 x(t) = f(t), \quad t \geq 0, \tag{24}$$

yleinen ratkaisu $x_Y(C_1, C_2; t)$ saadaan lisäämällä vastaavan homogeenisen yhtälön (7) yleiseen ratkaisuun $x_{h,Y}(C_1, C_2; t)$ jokin epähomogeenisen yhtälön (24) yksityisratkaisu $x_p(t)$. Kaavoilla kirjoitettuna

$$x_Y(C_1, C_2; t) := x_p(t) + x_{h,Y}(C_1, C_2; t), \quad t \geq 0. \tag{25}$$

Todistus. Todistamme väitteen 2. kertaluvun yhtälön (22) tapauksessa; yleinen tapaus on pelkästään kirjoitusasultaan monimutkaisempi. Muista, että 2. kertaluvun tapauksessa homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu oli annettu kahden vapaan parametrin $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ avulla, muodossa

$$x_{h,Y}(C_1, C_2; t) = C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t), \quad t \geq 0 \tag{26}$$

jossa $\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ ja $\phi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ tai $\phi_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ eräillä vakioilla $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ — näinhän sanottiin lauseessa 10 ja sitä seuraavassa määritelmässä 9.

Otetaan seuraavaksi käyttöön uusi notaatio, jossa $L := \frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt} + b$ tarkoittaa homogeenisen yhtälön (23) määräämää lineaarista "derivointioperaatiota". Kirjaimella L vasemmalta kertominen vaikuttaa funktioihin säännön

$$Lx = \left(\frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt} + b\right)x = \frac{d^2}{dt^2}x + a\frac{d}{dt}x + bx = x'' + ax' + bx$$

[11] Myöhemmin luvussa 6.2 osoitamme, että ko. toisen kertaluvun tehtävä voidaan palauttaa **vektoriarvoiseksi** 1. kertaluvun tehtäväksi. Tämä voidaan taas ratkaista **vektoriarvoisella** vakionvariointikaavalla kuten luvussa 6.4 nähdään. On kuitenkin mahdollista, että saatuun vakionvariointiratkaisuun jää monimutkaisia vektoriarvoisia integraalifunktioita (antiderivaattoja), joita ei voida lausua "alkeisfunktioiden" avulla. Tässä luvussa tutkimme epähomogeenisia yhtälöitä, joiden ratkaisu sitävastoin voidaan antaa yksinkertaisesti alkeisfunktioilla "suljetussa muodossa".

[12] Palauta mieleesi määritelmä 9 homogeenisen yhtälön yleiselle ja yksityisratkaisulle.

kautta, jolloin homogeeninen yhtälö (23) tulee kirjoitetuksi lyhyeen muotoon $Lx = 0$ ja epähomogeeninen (22) puolestaan muotoon $Lx = f$. Selvästi derivaatan alkeisominaisuuksien perusteella L on lineaarinen, eli $L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L x_1 + \beta L x_2$ kaikilla vakioilla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja derivoituvilla funktioilla $x_1, x_2 \in C^1(\mathbb{R}_+)$[13]. Niinpä L on laskujen kannalta ihan kuin matriisi, jolla kerrotaan vektoreita. Näillä notaatiolla hengellisesti vahvistettuna voimmekin vajota varsinaiseen todistustyöhön.

Jos meillä on Oraakkelin Antamana, Ihmeen Kaupalla ja Taivaan Lahjana saatu eräs yhtälön (22) yksityisratkaisu $x_p(t)$, $t \geq 0$, niin laskemalla summa

$$x_Y(C_1, C_2; t) := x_p(t) + C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t), \quad t \geq 0,$$

havaitaan, että olivatpa vakiot C_1, C_2 mitä tahansa, saadaan

$$\begin{aligned} Lx_Y(C_1, C_2; t) &= L\left(x_Y(t) + C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t)\right) \\ &= Lx_Y(t) + L\left(C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t)\right) = f(t) + 0 = f(t). \end{aligned}$$

(Miksi? Varmista että ymmärrät edellä olevan yhtälön jokaisen =-merkin oikeutuksen.) Niinpä funktio $t \mapsto x_Y(C_1, C_2; t)$ on ratkaisu epähomogeeniselle yhtälölle (22), mielivaltaisilla vakioitten $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ arvoilla.

Tarkastellaan käänteistä suuntaa, ja olkoon $x(t)$ mielivaltainen epähomogeenisen yhtälön (22) yksityisratkaisu. Tämä tarkoittaa L-kielellä sitä, että sekä $Lx = f$ että $Lx_p = f$, jossa yksityisratkaisu x_p on sama kuin todistuksen alkuosassa. Tällöin ratkaisujen erotus $x_\Delta := x - x_p$ toteuttaa

$$Lx_\Delta = Lx - Lx_p = f - f = 0,$$

joten x_Δ on siis homogeenisen yhtälön (23) eräs yksityisratkaisu. Silloin se voidaan esittää Lauseen 10 nojalla homogeenisen yhtälön yleisen ratkaisun (26) avulla, valitsemalla vakioille C_1, C_2 sopivat arvot. Mutta silloin näillä vakioitten arvoilla

$$x(t) = x_p(t) + x_\Delta(t) = x_p(t) + C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t) = x_Y(C_1, C_2; t), \quad t \geq 0.$$

Olemme päätelleet yllä, että mielivaltainen yhtälön (22) ratkaisu $x(t)$ voidaan esittää muodossa (25) eräillä vakioitten C_1, C_2 arvoilla. Tämä todistaakin väitteen, sen perusteella mitä yhtälön yleisellä ratkaisulla tarkoitetaan. □

Edellisessä lauseessa olemme jakaneet epähomogeenisen yhtälön yleisen ratkaisun etsimisen kahteen osaongelmaan, joista toisen — homogeenista yhtälöä koskevan — olemme oppineet jo aiemmin ratkaisemaan. Nyt tarvitsisimme siis keinoja, joilla löydämme epähomogeenisen yhtälön jonkin yksityisratkaisun x_p.

Valitettavasti maailma on nyt sellainen paikka, että tässä kohdin joudumme vastatuuleen, vaikeudet alkavat kasaantua ja valitusoikeutta ei ole. Yleistä sääntöä tarvittavan yksityisratkaisun löytämiselle ei nimittäin ole[14]. Jokaista käsillä olevaa ongelmaa on katsottava

[13] Olemme jättäneet muuttujan t pois näistä kaavoista, koska on asiayhteydestä selvää että se voitaisiin aina sinne kirjoittaa, ja että $t \in \mathbb{R}_+$ tutkimassamme tapauksessa.

[14] Jos olisi, niin sehän merkitsisi erikoistapauksessaan sitä, että osaisimme lausua "alkeisfunktioilla" jokaisen yhtälön $x' = f$ ratkaisun $x \in C^1(\mathbb{R})$, jossa f on annettu mielivaltainen alkeisfunktio. Mutta tiedämme, että mielivaltaisen alkeisfunktion f **integraalifunktiota** ei aina voida muodostaa alkeisfunktioitten avulla — vaikka alkeisfunktioiden **derivaatat** voidaankin aina lausua toisten alkeisfunktioitten avulla

erikoistapauksena, jolle joko keksitään yksittäisratkaisu alkeisfunktioiden avulla lausuttuna — tai sitten ei. Pääasiallinen työtapa on kokemukseen perustuva sofistikoituneitten arvauksien tekeminen, joihin itse asiassa kuuluu edellisen luvun 5.3 vakionvariointikaavan keksiminenkin. Onnena onnettomuudessa on se, että tällaisia ratkaisuja ei tarvitse löytää enempää kuin yksi kappale.[15]

Myös 2. kertaluvun tapauksessa voitaisiin soveltaa vakionvariointimenettelyä eli leikkiä, että edellä olevat vakiot C_1 ja C_2 olisivatkin toistaiseksi tuntemattomia funktioita $C_1(t)$ ja $C_2(t)$. Molemmille funktioille $C_1(t)$ ja $C_2(t)$ tulee sitten löytää differentiaaliyhtälöitä, jotka onnellisissa tapauksissa ovat helpommin ratkeavia kuin itse alkuperäinen yhtälö. Emme kuitenkaan käytä tässä monisteessa tätä menettelytapaa, vaan tarkastelemme ainoastaan kuormafunktioina sellaisia alkeisfunktioita $f(t)$, joista yksityisratkaisun muoto voidaan suoraan arvata. Otamme tästä pari esimerkkiä.

Esimerkki 15. *Etsi yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälölle*

$$x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = \sin t, \quad t \geq 0. \tag{27}$$

Ratkaisu etenee vaiheittain seuraavasti. Homogeeniyhtälön

$$x_h''(t) + 4x_h'(t) + 5x_h(t) = 0$$

karakteristisella polynomilla on juuret $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$, ja tämän yhtälön yleinen ratkaisu on aikaisemmin opitun perusteella

$$x_{h,Y}(C_1, C_2; t) = e^{-2t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right).$$

Tulee järkeilemällä löytää jokin epähomogeenisen yhtälön (27) yksittäisratkaisu $x_p(t)$. Huomaa, että (27) on itseasiassa erään vaimennetun massajousisysteemin yhtälö. Kun pakotetaan tällaista systeemiä voimalla muotoa $f(t) = \sin t$, kuvittelisi hyvinkin, että syntynyt liike on suurinpiirtein samantaajuista mutta vääristynyttä viivästynyttä versiota funktiosta $\sin(t)$ ja $\cos t = \sin(\pi/2 - t) = -\sin(t - \pi/2)$. Tehdään siis fysikaalisen intuition perusteella Ansatz

$$x_p(t) = D_1 \sin t + D_2 \cos t,$$

missä D_1, D_2 on meille toistaiseksi tuntemattomia vakioita. Tulon derivoimissäännön avulla saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= -D_2 \sin t + D_1 \cos t, \text{ ja} \\ x_p''(t) &= -D_1 \sin t - D_2 \cos t. \end{aligned}$$

Yhdistelemällä näitä saadaan

$$\begin{aligned} &x_p''(t) + 4x_p'(t) + 5x_p(t) = (-D_1 - 4D_2 + 5D_1)\sin t + (-D_2 + 4D_1 + 5D_2)\cos t \\ &= 4(D_1 - D_2)\sin t + 4(D_1 + D_2)\cos t. \end{aligned}$$

[15] On myös onnenpotku, ettei ole väliä kuinka kauhean epämatemaattisia, likaisia, intuitioon ja maalaisjärkeen nojautuvia synnillisiä temppuja ratkaisun löytämiseksi joudutaan tekemään. Tietenkin täytyy lopuksi todistaa, että löydetty funktio tosiaan on ratkaisu, mutta siihen tarvitaan vain derivointitaitoa. Matemaatikko tottelee tässä kohden jesuiittamoraalia, jossa päämäärä pyhittää keinot.

Jotta x_p olisi yhtälön (27) ratkaisu, riittää, että sinin ja kosinin kertoimet toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} D_1 - D_2 = \frac{1}{4} \\ D_1 + D_2 = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = \frac{1}{8} \\ D_2 = -\frac{1}{8}. \end{cases}$$

Etsitty yksityisratkaisu epähomogeeniselle yhtälölle (27) on siis

$$x_p(t) = \frac{1}{8}\sin t - \frac{1}{8}\cos t,$$

ja vastaavasti yleisen ratkaisun lauseke on

$$x_Y(C_1, C_2; t) = \frac{1}{8}\sin t - \frac{1}{8}\cos t + e^{-2t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right).$$

Yhtälön kaikki yksityisratkaisut saadaan valitsemalla parametreille C_1 ja C_2 kiinteitä arvoja.

Esimerkki 16. *Etsi yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälölle*

$$x''(t) - 6x'(t) - 16x(t) = t^3, \quad t \geq 0. \tag{28}$$

Karakteristisen polynomiyhtälön nollakohdat ovat $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = -2$. Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu

$$x_{h,Y}(C_1, C_2; t) = C_1 e^{8t} + C_2 e^{-2t}.$$

Keksitään epähomogeenisen yhtälön yksityisratkaisu. Nyt huomataan, että yhtälön (28) oikealla puolella on polynomi, ja että polynomin kaikki derivaatat ovat polynomeja. On siis uskottavaa, että etsitty yksityisratkaisu x_p voisi olla sekin polynomi. Jos x_p on polynomi astetta n, niin sen derivaatta x_p' on astetta $n-1$ ja toinen derivaatta astetta $n-2$. Koska t^3 on kolmatta astetta, täytyy yhtälön (28) kaikkien polynomiratkaisujen (jos niitä on ylipäätään olemassa) olla kolmatta astetta (selitä miksi!). Kirjoitetaan siis

$$x_p(t) = D_0 + D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3,$$

josta derivoimalla

$$x_p'(t) = D_1 + 2D_2 t + 3D_3 t^2, \quad x_p''(t) = 2D_2 + 6D_3 t.$$

Sijoittamalla nämä differentiaaliyhtälöön ja kokoamalla samanasteiset termit saadaan

$$\begin{aligned} &x_p''(t) - 6x_p'(t) - 16x_p(t) \\ &= (2D_2 - 6D_1 - 16D_0) + (6D_3 - 12D_2 - 16D_1)t + (-18D_3 - 16D_2)t^2 + 16D_3 t^3 = t^3. \end{aligned}$$

Tämä yhtälö toteutuu jokaisella $t \geq 0$ jos (ja vain jos) yhtälön molemmilla puolilla on sama polynomi. Tällöin vakiot ovat $D_3 = 1/16$, $D_2 = -9/128$, $D_1 = 39/512$ ja $D_0 = -153/4096$. Epähomogeenisen yhtälön yleiseksi ratkaisuksi on lopulta saatu

$$x_Y(C_1, C_2; t) = -\tfrac{153}{4096} + \tfrac{39}{512}t - \tfrac{9}{128}t^2 + \tfrac{1}{16}t^3 + C_1 e^{8t} + C_2 e^{-2t}.$$

5.5 Kuormitettu harmoninen värähtelijä

Olemme jo kuormitetun massajousisysteemin ja kuormitetun RLC-piirin esityksestä lähtien unelmoineet epähomogeenisen alkuarvotehtävän

$$
\begin{cases} x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t), \quad t \geq 0 \\ x'(0) = v_0, \quad x(0) = x_0, \end{cases} \tag{29}
$$

ratkaisemisesta. Meillä on nyt periaatteessa olemassa keinoja, joilla ainakin "helpoille" kuormitusfunktioille $f(t)$ löydettiin differentiaaliyhtälön $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t)$ yleinen ratkaisu, joka sisälsi kaksi vapaata parametria C_1 ja C_2. Alkuarvotehtävän (29) ratkaisussa jää jäljelle enää näiden parametrien valitseminen siten, että alkuehdot $x'(0) = v_0$, $x(0) = x_0$ toteutuu.

Esimerkki 17. *Ratkaise alkuarvotehtävä*

$$
\begin{cases} x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = \sin t, \quad t \geq 0 \\ x'(0) = 0, \quad x(0) = 1. \end{cases}
$$

Huomaa, että differentiaaliyhtälöosa on sama kuin esimerkissä 15. Derivoimalla jo aikaisemmin löydetty yleisen ratkaisun lauseke

$$
x_Y(C_1, C_2; t) = \frac{1}{8}\sin t - \frac{1}{8}\cos t + e^{-2t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right)
$$

saadaan

$$
\begin{aligned} &x_Y'(C_1, C_2; t) \\ &= \frac{1}{8}\cos t + \frac{1}{8}\sin t - 2e^{-2t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) + e^{-2t}\left(-C_1 \sin t + C_2 \cos t\right). \end{aligned}
$$

Koska $\cos 0 = 1$ ja $\sin 0 = 0$, saadaan alkuehdoista yhtälöt

$$
\begin{cases} x_Y(C_1, C_2; 0) = -\frac{1}{8} + C_1 = 1 \\ x_Y'(C_1, C_2; 0) = \frac{1}{8} - 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 9/8 \\ C_2 = 17/8. \end{cases}
$$

Etsitty epähomogeenisen alkuarvotehtävän ratkaisu on siis

$$
x(t) = \frac{1}{8}\big(\sin t - \cos t + e^{-2t}\left(9\cos t + 17\sin t\right)\big).
$$

Voimme siis todeta, että osaamme periaatteessa kirjoittaa tarkan ja täsmällisen ratkaisun jokaiselle epähomogeeniselle alkuarvotehtävälle muotoa (29), missä kuormafunktio $f(t)$ on sellainen, että onnistumme ravistamaan hihasta yhden yksittäisratkaisun x_p yhtälölle $x_p''(t)+ax_p'(t)+bx_p(t) = f(t)$. Niissä tapauksissa, joissa yksittäisratkaisua ei osata näin kirjoittaa alkeisfunktioiden avulla "suljetussa muodossa", joudutaan turvautumaan tietokoneisiin ja numeerisiin ratkaisumenetelmiin. Niillä menetelmillä löydetään likimääräisiä (mutta tarvittaessa mielivaltaisen tarkkoja) numeerisia (lukutaulukon eikä matemaattisen kaavan muotoon kirjoitettuja) ratkaisuja. Numeriikkaa emme kuitenkaan käsittele näillä luennoilla.

6 1. kertaluvun DY-systeemit

6.1 Yleinen idea

Usein kaksi tai useampi differentiaaliyhtälöä ovat *kytketty* toisiinsa. Tämä tarkoittaa sitä, että ensimmäisen yhtälön ratkaisu vaikuttaa toisen yhtälön ratkaisun derivaattaan — ja kääntäen. Asian havainnollistamiseksi tarkastellaan erästä nk. peto-saalismallia, jonka V. Volterra esitti 1920-luvulla Adrianmeren kalakantojen vaihtelujen selvittämiseksi. Sovellamme tätä ideaa vaikkapa Kuusamon järviin, jossa elelee muikkuja ja haukia.

Olkoon $s(t)$ muikkupopulaation (saalis) koko hetkellä t, ja $p(t)$ haukipopulaation (peto) koko. Oletetaan, että hauet syövät vain muikkuja, ja muita muikunsyöjiä ei ole.

Jos haukia ei olisi, muikut lisääntyisivät ainakin periaatteessa jonkin aikaa[16] eksponentiaalisen kasvulain

$$s'(t) = as(t) \quad \Leftrightarrow \quad s(t) = e^{at}s(0)$$

mukaisesti, missä $a > 0$ on lisääntymisnopeuden selittävä vakio. Haukia kuitenkin on, ja hauki kohtaa muikun todennäköisyydellä, joka on verrannollinen populaatioiden kokojen tuloon $s(t)p(t)$. Tällöin muikkupopulaation koko toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$s'(t) = as(t) - bs(t)p(t)$$

jossa $b > 0$ on eräs vakio. Vakio b mallintaa todennäköisyyttä jolla muikku tulee syödyksi hauen kohdatessaan.

Mikäli muikkuja ei olisi, haukipopulaatio kuolisi nälkään hajoamislain $p'(t) = -cp(t)$ mukaan, jossa $c > 0$ on eräs vakio. Toisaalta, muikkuja on ja niiden syöminen lisää haukipopulaation kasvua tekijällä $ds(t)p(t)$, jossa $d > 0$ on eräs vakio. Muikku- ja haukipopulaatiot elävät siis keskinäisessä riippuvuudessa mallin

$$\begin{cases} s'(t) = as(t) - bs(t)p(t) \\ p'(t) = -cp(t) + ds(t)p(t), \quad t \geq 0, \\ s(0) = s_0, p(0) = p_0 \end{cases} \tag{30}$$

mukaisesti. Kyseessä on kaksi differentiaaliyhtälöä, jotka ovat kytkettyjä toisiinsa kytkentävakioitten b ja d välityksellä. Differentiaaliyhtälöparia (30) sanotaan *differentiaaliyhtälösysteemiksi*. Tässä esimerkissä yhtälöt ovat epälineaarisia, koska oikealla puolella esiintyy ratkaisujen tulo $s(t)p(t)$, eikä pelkästään summia ratkaisujen monikerroista. Epälineaarisenakin differentiaaliyhtälösysteemi (30) voitaisiin likimäärin ratkaista kirjoittamalla pieni tietokoneohjelma.

Esimerkki 18. *Mikäli työn puutetta ilmenee, niin kirjoitapa sellainen koodinpätkä matlabilla, ja kokeile erilaisten vakioitten a, b, c, d ja alkuehtojen s_0, p_0 arvoilla.*

[16] ennenkuin koko maailmankaikkeus olisi täyttynyt muikuista...

Emme kuitenkaan tarkastele näissä luennoissa epälineaarisia differentiaaliyhtälösysteemejä vaan ainoastaan lineaarisia, jotka ovat kahden riippuvan funktion x_1, x_2 tapauksessa muotoa

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t), \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Käyttäen matriisitulon määritelmää yllä oleva yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t),$$

jossa matriisit ja vektorit ovat

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{ja } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Voidaan siis tarkastella yleisemminkin differentiaaliyhtälösysteemejä vektoriarvoisina differentiaaliyhtälöinä $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, jossa A on $n \times n$-matriisi, ja $\mathbf{x}(t)$ on C^1-funktio, jonka arvot ovat n-komponenttisia pystyvektoreita.

6.2 Korkeamman kertaluvun skalaariyhtälö palautettuna 1. kertaluvun matriisisysteemiksi

Tässä luvussa näytämme, kuinka mielivaltainen vakiokertoiminen, lineaarinen n. kertaluvun skalaaridifferentiaaliyhtälö voidaan palauttaa erääksi 1. kertaluvun differentiaaliyhtälösysteemiksi. Tarkastelemme siis epähomogeenista yhtälöä

$$x^{(n)}(t) + p_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1x'(t) + p_0x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

Olkoon nyt $x(t)$ tällaisen yhtälön eräs ratkaisu. Määrittelemme $\mathbb{R}^n$-vektoriarvoisen funktion

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{32}$$

Laskemalla komponenteittain derivaatta parametrin t suhteen saadaan

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \\ x^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ -p_0x(t) - p_1x'(t) \cdots - p_{n-1}x^{(n-1)}(t) + f(t) \end{bmatrix} = \cdots,$$

jossa jälkimmäisessä yhtälössä on käytetty itse differentiaaliyhtälöä (31). Mutta nyt matriisitulon määritelmän perusteella yhtälön oikea puoli voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \cdots &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-2} & -p_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-2)}(t) \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \\ &= A\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t), \end{aligned}$$

mistä $n \times n$-matriisi A ja vektorifunktio $\mathbf{F}(t)$ määräytyvät. Huomaa, että matriisin A melkein kaikki alkiot ovat nollia (paitsi alin rivi ja lävistäjän päällä oleva rivi ykkösiä).

Jokaisesta yhtälön (31) ratkaisusta $x(t)$ saadaan siis 1. kertaluvun lineaarisen differentiaaliyhtälösysteemin

$$\mathbf{x}'(t) - A\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{33}$$

ratkaisu. Tässä matriisi A on aivan erityistä muotoa, ja sitä kutsutaan lukujonoon

$$-p_0, -p_1, -p_2, \cdots, -p_{n-2}, -p_{n-1}$$

liittyväksi *kumppanimatriisiksi* (engl. companion matrix)[17].

Voidaan myös edetä päinvastaiseen suuntaan mikä lienee itse asiassa helpompaa. Voimme nimittäin osoittaa, että jokainen differentiaaliyhtälösysteemin (33) ratkaisu $\mathbf{x}(t)$ antaa yksikäsitteisellä tavalla erään yhtälön (31) ratkaisun $x(t)$ mikäli A ja $F(t)$ ovat yllä annettua muotoa. Tässä tapauksessa oletetaan, että vektoriarvoinen funktio $\mathbf{x}(t) = \left[\begin{smallmatrix} x_0(t) & x_1(t) & \cdots & x_{n-1}(t) \end{smallmatrix}\right]^T$ on yhtälön (33) ratkaisu, jossa A on siis jokin kumppanimatriisi. Kumppanimatriisin muodosta havaitaan, että saadaan n kpl yhtälöitä

$$\begin{cases} x_0'(t) & = x_1(t) \\ x_1'(t) & = x_2(t) \\ & \vdots \\ x_{n-2}'(t) & = x_{n-1}(t) \\ x_{n-1}'(t) & = -p_0x_0(t) - p_1x_1(t) \cdots - p_{n-1}x_{n-1}(t) + f(t) \end{cases}$$

Jos nyt poimitaan funktio $x(t) := x_1(t)$ ratkaisun $\mathbf{x}(t)$ ensimmäisestä komponentista, huomataan ensimmäisten $(n-1)$ yhtälön nojalla, että derivaatat toteuttavat

$$x^{(j)}(t) = x_j(t), \quad j = 1, \cdots, n-1.$$

Nyt alimmasta yhtälöstä $x_{n-1}'(t) = -p_0x_0(t) - p_1x_1(t) \cdots - p_{n-1}x_{n-1}(t) + f(t)$ saadaan eliminoimalla funktiot $x_j(t)$

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) = x_{n-1}'(t) &= -p_0x_0(t) - p_1x_1(t) \cdots - p_{n-1}x_{n-1}(t) + f(t) \\ &= -p_0x(t) - p_1x^1(t) \cdots - p_{n-1}x^{(n-1)}(t) + f(t), \end{aligned}$$

jonka pää ja häntä osoittavat, että funktio $x(t)$ on differentiaaliyhtälön (31) ratkaisu. Juhlallisesti voimme siis todeta ymmärtävämme seuraavaa:

[17] Käännös hieman ontuu, mutten keksi parempaakaan. Kukapa nyt haluaisi olla parisuhteessa matriisin kanssa?

Lause 19. *Olkoon yhtälöt* (31) *ja* (33) *kuten edellä. Tällöin molempien yhtälöiden ratkaisut ovat keskenään 1-1-vastaavuudessa. Ratkaisujen välinen yhteyden antaa yhtälö* (32).

Sijoittamalla yhtälöön (32) *alkuhetki* $t = 0$ *voidaan myös molempiin yhtälöihin liittyvät alkuehdot liittää toisiinsa 1-1-vastaavuudella.*

Ratkaistaessa korkeamman kertaluvun differentiaaliyhtälöitä numeerisesti tietokoneella palautetaan tehtävä yleensä 1. kertaluvun differentiaaliyhtälösysteemiksi. Tietokoneohjelmat, kuten matlab, osaavat yleensä vain integroida 1. kertaluvun systeemejä (mutta onneksi matriisiarvoisina), koska korkeamman kertaluvun yhtälöt ovat laskennallisestikin vain näiden erikoistapaus.

Esimerkki 20. *Olkoon* $n \times n$ *kumppanimatriisi*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-2} & -p_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Laske matriisin A *karakteristinen polynomi* $Q(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ *käyttämällä alideterminanttikehitelmää. Vertaa tätä differentiaaliyhtälön* (31) *karakteristiseen polynomiin* $P(\lambda)$. *Mitä huomaat? Mitä voidaan sanoa matriisin* A *ominaisarvoista?*

6.3 Vaimennettu värähtelijä matriisimuodossa

Palautamme luvussa 5.2 käsitellyn vaimennetun, kuormitetun RLC-piirin differentiaaliyhtälön 1. kertaluvun differentiaaliyhtälösysteemiksi. Etenemme olennaisesti samalla tavalla kuin edellisessä luvussa 6.2, mutta annamme konkreettisen esimerkin valaista takana olevaa fysikaalista todellisuutta.

Suoraan laskemalla huomataan, että

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i'(t) \\ i(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} i''(t) \\ i'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L}i'(t) - \frac{1}{LC}i(t) + e'(t) \\ i'(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i'(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I}{L}e'(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Koska $Li'(t) = u_L(t)$, voidaan virran derivaatta eliminoida ylläolevista yhtälöistä, ja saadaan

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_L(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_L(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L}e'(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Edellisessä yhtälössä piirin läpi menevä virta $i(t)$ ja kelan yli vaikuttava jännite $u_L(t)$ on valittu *tilamuuttujiksi.* Kaikki muut yhtälössä esiintyvät jännitteet ja virrat voidaan lausua näiden kahden funktion avulla. (Tässä nimenomaisessa esimerkissä muita virtoja ei ole kuin tuo $i(t)$). Vektoriarvoista funktiota

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} u_L(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

sanotaan systeemin *tilatrajektoriksi*, ja sen arvot ovat pisteitä *tila-avaruudessa*, esimerkkimme tapauksessa $\mathbb{R}^2$:ssa. Tila-avaruudesta käytetään erityisesti mekaniikan sovellutuksissa myös nimeä *faasitaso tai -avaruus*. Tunnettaessa tilatrajektori $\mathbf{x}(t)$ mielivaltaisella hetkellä t_0 voidaan tällöin vektorin $\mathbf{x}(t_0)$ sisältämästä informaatiosta päätellä täydellisesti kaikkien muidenkin RLC-piiristä mitattavien fysikaalisten suureitten arvot. Tilatrajektorin idea on siinä, että se kertoo missä tilassa kapistus kullakin hetkellä on — mahdollisimman pienellä määrällä (esimerkissämme kahdella) selittäviä dynaamisia muuttujia (esimerkissämme $u_L(t)$ ja $i(t)$).

Samaa RLC piiriä voidaan toki mallintaa valitsemalla tilamuuttujat toisinkin. Voidaanhan kirjoittaa mm. yhtälöpari

$$\begin{cases} u_C'(t) = \frac{1}{C} i(t) \\ i'(t) = -\frac{1}{L} u_C(t) - \frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{L} e(t). \end{cases}$$

Tästä saadaan välittömästi 1. kertaluvun matriisisysteemi

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} e(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6.4 Vektoriarvoisten 1. kertaluvun systeemien ratkaisu

Ensimmäisen kertaluvun vektoriarvoisten systeemien ratkaisu tapahtuu aivan samalla tavoin kuin 1. kertaluvun skalaariyhtälöitten: vakionvariointikaava (21) on voimassa täysin samannäköisessä muodossa, mutta tarvittavissa kohdin reaaliluvuilla kertominen on korvattu matriiseilla kertomisella. Tarvitaan myös erityinen tapa kuinka käsitetään neliömatriisin eksponenttifunktio e^{At}. Tämä määritellään helpoimmin tavallisen eksponenttifunktion Taylor-sarjan avulla

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots,$$

sijoittamalla pelkästään muuttujan x paikalle matriisi At, ja huomaamalla että ainakin sarjan jokainen termi on hyvin määritelty matriisi. Se, että tällä tavoin laskettu summa lähestyy raja-arvoa kun termejä otetaan mukaan äärettömän monta, jätetään tällä kertaa todistamatta.

Homogeenisen matriisiyhtälön tapauksessa saadaan alkuarvo-ongelmalle

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad t \geq 0 \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

yksikäsitteisen ratkaisun kaava

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0, \quad t \geq 0.$$

Edellä A on mikä tahansa $n \times n$-matriisi, ja alkuarvovektori $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Tämän todistus on varsin suoraviivainen, mikäli pidämme tunnettuna tosiasiaa, että matriisieksponentin kaavaa

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^kt^k}{k!} + \cdots, \tag{34}$$

voidaan derivoida termeittäin, ja saatu sarja todellakin suppenee, kun mukaan otetaan "äärettömän monta" termiä. Saadaanhan derivoimalla

$$\begin{aligned} e^{At}\mathbf{x}_0 &= A\mathbf{x}_0 + 2\frac{A^2t}{2!}\mathbf{x}_0 + 3\frac{A^3t^2}{3!}\mathbf{x}_0 + \cdots + k\frac{A^kt^{k-1}}{k!}\mathbf{x}_0 + \cdots \\ &= A\left(I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^kt^k}{k!} + \cdots\right)\mathbf{x}_0 = Ae^{At}\mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Epähomogeenisessa tapauksessa, kun 1. kertaluvun matriisidifferentiaaliyhtälössä on mukana kuormatermi

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t),$$

voidaan derivoimalla osoittaa, että vakionvariointikaava

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-v)}\mathbf{f}(v)\,dv \tag{35}$$

antaa ko. yhtälön yksikäsitteisen ratkaisun, joka toteuttaa alkuehdon $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Todistus ei itseasiassa ole olennaisesti vaikeampi kuin saman asian näyttäminen skalaaritapauksessa. Yhtälössä esiintyvä vektoriarvoisen funktion integraali lasketaan kullakin kiinteällä $t \geq 0$ vektoriarvoisesta funktiosta

$$v \mapsto e^{A(t-v)}\mathbf{f}(v).$$

Mitä taas tulee vektoriarvoisen funktion integroimiseen, siinä edetään integroimalla vektorin komponentit erikseen – derivoidaanhan vektoriarvoinen funktio derivoimalla kukin komponentti erikseen. Esim. kaksiulotteisessa tapauksessa

$$\int_0^t \begin{bmatrix} g_1(v) \\ g_2(v) \end{bmatrix} dv = \begin{bmatrix} \int_0^t g_1(v)\,dv \\ \int_0^t g_2(v)\,dv \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 21. *Osoita suoraan derivoimalla, että vakionvariointikaavan antama funktio*

$$x(t) = e^{ta}x_0 + \int_0^t e^{(t-v)a}f(v)\,dv$$

todellakin on ratkaisu 1. kertaluvun alkuarvotehtävälle

$$\begin{cases} x'(t) - ax(t) = f(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

olipa vakiot $a, x_0 \in \mathbb{R}$ mitä tahansa.[18] *Ratkaisu helpottuu kirjoittamalla $x(t)$ muotoon $x(t) = e^{ta}\left(x_0 + \int_0^t e^{-va} f(v)\, dv\right)$. Käytä sitten tulon derivoimiskaavaa sekä integraalilaskennon peruslausetta ("integraalin derivaatta antaa takaisin alkuperäisen funktion").*

Kuinka tehty lasku muuttuu, jos a korvataan matriisilla A ja $x(t), f(t)$ vastaavasti vektoreilla $\mathbf{x}(t), \mathbf{f}(t)$?

Kuinka vakionvariointikaavassa tarvittavat matriisieksponenttifunktiot lasketaan käytännöllisesti? Otetaan tästä esimerkki.

Esimerkki 22. *Esimerkissä 15 haettiin yleistä ratkaisua differentiaaliyhtälölle*

$$x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = \sin t, \quad t \geq 0.$$

Muodosta tämän yhtälön vasemman puolen määrittämä kumppanimatriisi A, ja laske matriisieksponentti e^{tA} kun $t \geq 0$.

Haluttu eksponenttifunktio muodostetaan helpoimmin ensin diagonalisoimalla kumppanimatriisi $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{smallmatrix}\right]$, silloin kun tämä on mahdollista. Hakemalla kumppanimatriisin ominaisarvot yhtälöstä $\det(\lambda I - A) = 0$ huomataan, että ne ovat samat kuin differentiaaliyhtälön karakteristisen polynomin $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$ nollakohdat. Nämä olivat aikaisemman perusteella $\lambda_1 = -2 + i$ ja $\lambda_2 = -2 - i$. Etsitään vastaavat ominaisvektorit, joiksi saadaan esim.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2+i \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2-i \end{bmatrix}.$$

Nyt ominaisarvojen ja -vektoreiden avulla voidaan kirjoittaa diagonalisointi matriisille A:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2+i & -2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2+i & 0 \\ 0 & -2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2+i & -2-i \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2+i & -2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2+i & 0 \\ 0 & -2-i \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{-2i} \begin{bmatrix} -2-i & -1 \\ 2-i & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

jossa tarvittava 2×2 käänteismatriisi löytyy helpoiten determinanttien yhteydessä opitulla käänteismatriisin kaavalla (katso vaikka Kreyszig: Adv. Eng. Math., 8 Ed., sivu 353). Diagonalisointi auttoi meitä matriisin potenssien laskemisessa, saatiinhan jokaiselle $j \geq 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}^j = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2+i & -2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2+i)^j & 0 \\ 0 & (-2-i)^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2-i & -1 \\ 2-i & 1 \end{bmatrix}.$$

Mutta matriisieksponentin määritelmä (34) oli vain summa tällaisista potensseista, vakioilla kerrottuna. Niinpä saadaan suoraan

$$\begin{aligned} e^{t\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{smallmatrix}\right]} &= \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2+i & -2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(-2+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-2-i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2-i & -1 \\ 2-i & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{ie^{-2t}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2+i & -2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2-i & -1 \\ 2-i & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

[18] Tämä kaava johdettiin aikaisemmin lauseessa 13 vakionvariointimenettelyllä. Haluamme nyt osoittaa toisella tavalla, että saatu kaava on oikea. Samalla tulemme melkein osoittaneeksi, että sama kaava pätee myos vektoriarvoisessa tapauksessa.

Sievennystä voidaan jatkaa lausumalla e^{it} ja e^{-it} trigonometristen funktioiden avulla, Eulerin kaavojen nojalla. Lopuksi kolmen 2×2 matriisin tulo voitaisin laskea tavanomaisesti, mutta tämä olisi jo varsin työlästä. Onneksi matemaattiset työkaluohjelmat (kuten matlab) osaavat laskea matriisien eksponenttifunktioita[19].

Esimerkki 23. *Palauta esimerkin 17 toisen kertaluvun epähomogeeninen yhtälö kumppanimatriisimuotoon* $\mathbf{x}'(t) - A\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$. *Kirjoita sen yleinen ratkaisu vakionvariointikaavan avulla, käyttäen alkuehtona* $\mathbf{x}(0) = \left[\begin{smallmatrix}1 & 0\end{smallmatrix}\right]^T$. *Tässä tapauksessa integraali voidaan myös laskea tarkasti, ja saadaan sama tulos kuin aikaisemmin. (Laskut ovat varsin pitkiä, ainakin matriisieksponentin laskeminen.)*

6.5 1. kertaluvun systeemien stabiilisuudesta

Tarkastelemme seuraavassa tapausta, jossa differentiaaliyhtälösysteemin $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ määrittelevällä $n\times n$-matriisilla A on n kpl lineaarisesti vapaita ominaisvektoreita $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^n$. Ominaisvektoreina nämä toteuttavat ominaisarvoyhtälöt

$$A\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j, \quad j = 1, \cdots, n, \tag{36}$$

missä kompleksiluvut λ_j ovat vastaavat ominaisarvot. Tällöin vektorijoukko $\{\mathbf{x}_j\}$ muodostaa kannan n-komponenttisten pystyvektoreitten avaruudelle $\mathbb{R}^n$ — tätä kantaa kutsutaan matriisin A määrittelemäksi *ominaisvektorikannaksi*.

Matriisilaskusta muistetaan, että riittävä ehto $n \times n$-matriisin A ominaisvektorikannan olemassaololle on se, että matriisilla A on n kpl keskenään erisuuria ominaisarvoja λ_j. Toinen riittävä ehto on se, että matriisi A on normaali eli kommutoi konjugaattitranspoosinsa kanssa: $A^*A = AA^*$. Oletamme jatkossa, että matriisin A ominaisvektorit muodostavat joka tapauksessa tällaisen kannan.

Tarkastelemme alkuarvotehtävää

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad t > 0 \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Koska ominaisvektorit $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1,\cdots,n}$ muodostavat kannan $\mathbb{R}^n$:lle, voidaan alkuehtovektori kirjoittaa yksikäsitteisesti niiden lineaarikombinaationa

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

eräillä reaalisilla vakioilla $c_1, \cdots, c_n$. Koska kukin $\mathbf{x}_j$ on ominaisvektori, seuraa määrittelevästä kaavasta (36) ja matriisieksponentin kaavasta (34)

$$e^{tA}\mathbf{x}_j = e^{t\lambda_j}\mathbf{x}_j, \quad j = 1, \cdots, n.$$

[19]Varoitus! Matlabissa tulee matriisieksponentin laskemiseen käyttää funktiota **expm**. Funktiota **exp** voidaan myös soveltaa matriisiin A, mutta tuloksena on vain uusi matriisi, jonka jokainen elementti on eksponenttifunktio vastaavasta A:n elementistä!

Kirjoittamalla nyt alkuarvotehtävän ratkaisu matriisieksponentin avulla kuten aikaisemminkin, saadaan matriisin e^{tA} lineaarikuvausominaisuuden perusteella

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{tA}\mathbf{x}_0 = c_1 e^{tA}\mathbf{x}_1 + c_2 e^{tA}\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n e^{tA}\mathbf{x}_n \\ &= c_1 e^{t\lambda_1}\mathbf{x}_1 + c_2 e^{t\lambda_2}\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n e^{t\lambda_n}\mathbf{x}_n.\end{aligned}$$

Huomataan, että alkuarvotehtävän ratkaisu on tietty alkuehdosta riippuva lineaarikombinaatio hyvin yksinkertaisista lausekkeista muotoa $e^{t\lambda_j}\mathbf{x}_j$, $j = 1, \cdots, n$. Näitä funktioita voitaisiin kutsua differentiaaliyhtälön $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ sisäisiksi *moodeiksi* tai jopa *resonansseiksi*. Karkeasti, koko ratkaisun $\mathbf{x}(t)$ käyttäytyminen voidaan luokitella sen perusteella, minkälaisista eksponenttifunktioista $e^{t\lambda_j}$ se on laitettu kokoon. Tarkastellaan seuraavaksi erästä mielivaltaisesti valittua $e^{t\lambda_j}\mathbf{x}_j$ ja sen käytöstä.

Jos ominaisarvo λ_j on reaalinen, erotetaan kolme tapausta: $\lambda_j < 0$, $\lambda_j = 0$ ja $\lambda_j > 0$. Selvästi jos $\lambda_j < 0$, niin

$$e^{t\lambda_j}\mathbf{x}_j \to 0 \quad \text{kun } t \to \infty.$$

Tähän ominaisvektoriin $\mathbf{x}_j$ liittyvää moodia sanotaan *eksponentiaalisesti stabiiliksi*, ja se suppenee eksponentiaalista hajoamislakia noudattaen nollaan. Jos taas $\lambda_j = 0$, saadaan moodiksi $e^{t\lambda_j}\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j$ — kyseessä on pelkästään *stabiili* moodi siksi, ettei se kasva, jos ei katoakaan. Tapauksessa $\lambda_j > 0$

$$e^{t\lambda_j}\mathbf{x}_j \to \infty \quad \text{kun } t \to \infty$$

eksponentiaalista kasvulakia noudattaen. Tällainen moodi on *epästabiili*.

Vastaava luokittelu voidaan tehdä myös siinä tapauksessa, että matriisin A ominaisarvo λ_j on aidosti kompleksinen. Jos hajotetaan reaaliosiksi ja imaginääriosiksi $\lambda_j = \sigma_j + i\omega_j$ ja käytetään kompleksiluvun eksponenttifunktion kaavaa, saadaan

$$e^{t\lambda_j}\mathbf{x}_j = e^{t\sigma_j} \cdot (\cos\omega_j t + i \sin\omega_j t)\,\mathbf{x}_j.$$

Nyt reaaliosa σ_j määrää onko moodi eksponentiaalisesti stabiili ($\sigma_j < 0$), pelkästään stabiili $\sigma_j = 0$ vaiko eksponentiaalisesti kasvava $\sigma_j > 0$ ihan samoin perusteluin kuten edellä. Erona on nyt vain se, että laskut tulee tehdä kompleksiluvuilla, joilla kuitenkin lasketaan aivan samoin kuin puhtailla reaaliluvuillakin.

Koska kompleksiluku $\cos\omega_j t + i\sin\omega_j t$ on itseisarvoltaan aina 1, ei imaginääriosa ω_j vaikuta lainkaan stabiilisuuteen ko. ominaisvektorin $\mathbf{x}_j$ suunnassa. Sen sijaan, mitä suurempi ω_j on itseisarvoltaan, sitä suurempitaajuisia sinimuotoisia värähtelyitä se aiheuttaa ko. moodiin. Tällaiset taajuudet ω_j ovat siis systeemin *resonanssitaajuuksia*.

Käytännön laskuissa stabiilisuustarkastelu tehdään kivuttomimmin diagonalisoimalla matriisi, eli hakemalla kääntyvä matriisi X ja diagonaalimatriisi D siten, että $X^{-1}AX = D$. Jos $\{\mathbf{x}_j\}$ on ominaisvektorikanta ja vastaavat ominaisarvot $\{\lambda_j\}$, voidaan matriisit X ja D antaa muodossa

$$X = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n\end{bmatrix} \text{ ja } D = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

Esimerkki 24. *Tutki differentiaaliyhtälön* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ *stabiilisuutta kun* $A = \left[\begin{smallmatrix} -19 & 7 \\ -42 & 16 \end{smallmatrix}\right]$. *Voitko valita alkuehdon* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ *hetkellä* $t = 0$ *siten, että saatu ratkaisu on stabiili?*

Diagonalisoimalla saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -19 & 7 \\ -42 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Tällöin saadaan kaikilla $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) - A\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}'(t) - \begin{bmatrix} -19 & 7 \\ -42 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \left(\mathbf{y}'(t) - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) \right) = 0, \end{aligned}$$

jossa $\mathbf{y}(t) = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right]^{-1} \mathbf{x}(t)$ ja siis $\mathbf{x}(t) = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right] \mathbf{y}(t)$. Koska matriisi $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ on kääntyvä, saadaan nyt differentiaaliyhtälösysteemi trajektorille $\mathbf{y}(t)$ muodossa

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t).$$

(Kirjoita itse ratkaisu $\mathbf{y}$:n komponenteille!). Koska ominaisarvo 2 on positiivisinen, tämän yhtälön ratkaisut ovat epästabiileja ja eksponentiaalisesti kasvavia, ellei alkuarvon $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ ylempi komponentti ole nolla.

Alkuperäiselle systeemille ja sen trajektorille $\mathbf{x}(t)$ saadaan samoin stabiileja ratkaisuja vain, jos $\mathbf{x}_0 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] C$, jossa $C \in \mathbb{C}$ (tai $\mathbb{R}$ jos halutaan reaalisia ratkaisuja) on mielivaltainen vakio.