

**MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1, I/2022**

**Laskuharjoitus 2A** alkuviikolla 37

Aihepiiri: Jonot ja sarjat

Tehtävät 1–3 lasketaan ennen alkuviikon harjoitusta ja harjoituksissa opiskelijat esittävät ratkaisunsa taululla. Tehtävät 4–5 palautetaan MyCoursesin kautta tiistaihin 20.9. klo 23:59 mennessä. Muista myös verkkotehtävät MyCoursesissa.

1. (A & E 9.3.1, 9.3.10) Suppeneeko sarja

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}, \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + k}{2 + k}?$$

2. Tutki sarjan suppenemista, kun sen yleinen termi on muotoa

$$\text{a) } a_k = k/(k + 2), \quad \text{b) } b_k = 7 \frac{\sin^2 k \cos k^2}{k^{5/2}}.$$

3. a) Oletetaan tunnetuksi, että raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

on olemassa Fibonaccin jonolle ( $f_n$ ). Päättele sen arvo suoraan palautuskaavaa tutkimalla.

- b) Tarkista tulos käyttämällä aikaisemmin johdettua yleisen termin  $f_n$  lauseketta.

4. Eräässä tietokonepelissä voi jokaiselta tasolta edetä seuraavalle tasolle kahta eri reittiä pitkin tai suoraan kaksi tasoa ylöspäin kolmea eri reittiä pitkin. Merkitään lähtötasolta 0 tasolle  $n$  johtavien erilaisten reittien lukumäärää symbolilla  $a_n$ , jolloin  $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ .

- a) Osoita, että lauseke  $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n$  toteuttaa palautuskaavan kaikilla  $n$ , kun  $A, B \in \mathbf{R}$  ovat vakioita.

- b) Totea, että  $a_1 = 2$  ja  $a_2 = 7$ . Määritä tämän perusteella vakiot  $A$  ja  $B$ .

5. Olet nostamassa 10 vuoden asuntolainaa, jonka suuruus on 120 000 euroa. Pankki tarjoaa annuiteettilainaa (eli kaikki maksuerät ovat yhtä suuria), jonka viitekorko on 0 % ja marginaali 0,8 %. Mikä on maksuerän suuruus, kun takaisinmaksu tapahtuu vuosittain (aina kunkin vuoden lopussa)?

## Laskuharjoitus 2L loppuviikolla 37

Aihepiiri: Funktion jatkuvuus ja raja-arvo, derivaatta

Näitä tehtäviä lasketaan ja käsitellään harjoituksen aikana.

1. Määritä raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$

Vihje: Sopiva lavennus.

2. Jos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0,$$

niin pisteen  $x = 0$  lähistöllä pätee  $f(x) \approx Lg(x)$ . Sovella tätä tulosta edellisen tehtävän jälkimmäiseen raja-arvoon ja johda sen avulla approksimaatio  $\sqrt{1+x} \approx \dots$ . Päättele tämän avulla lukujen  $\sqrt{1,01}$  ja  $\sqrt{0,99}$  likiarvot ilman laskinta. Entä  $\sqrt{101}$ ?

3. (A & E 2.8.17) Määritä ne välit, joilla funktio  $f(x) = x^3(5-x)^2$  on kasvava/vähenevä.