2A Jatkuvat satunnaismuuttujat

Tuntitehtävät

2A1 (Palkkajakauman malli.) Satunnaisesti valitun palkansaajan kuukausiansiota (eur) mallinnetaan satunnaismuuttujalla X, jolla on tiheysfunktio

$$f(x) = \begin{cases} \alpha c^{\alpha} x^{-\alpha-1}, & x > c, \\ 0, & \text{muuten}, \end{cases}$$

missä $\alpha = 1.6$ ja $c = 1300$.

(a) Laske X:n kertymäfunktio ja piirrä siitä kuva.

(b) Määritä X:n arvojoukko, eli miten pieniä ja miten suuria arvoja X voi saada?

(c) Laske todennäköisyys, että satunnaisesti valittu palkansaaja ansaitsee yli 13 000 eur/kk.

(d) Määritä sellainen ansiotaso z, että 90% palkansaajista ansaitsee alle z euroa kuukaudessa.

2A2 (Molemmat myöhässä.) Ulla saapuu U minuuttia ja Venla V minuuttia myöhässä sopimastaan lounastapaamisesta, jonka piti alkaa klo 12:00. Oletetaan, että myöhästymisajat noudattavat jatkuvan välin $[0, 60]$ tasajakaumaa ja ovat toisistaan riippumattomat.

(a) Selvitä U:n jakauman tiheysfunktio f_U, V:n jakauman tiheysfunktio f_V sekä U:n ja V:n yhteisjakauman tiheysfunktio $f_{U,V}$.

(b) Laske todennäköisyys, että Ulla saapuu ennen klo 12:20.

(c) Laske todennäköisyys, että Ulla saapuu ennen klo 12:15 ja Venla saapuu klo 12.30 ja 12:45 välillä. Suorita lasku värittämällä $[0, 60] \times [0, 60]$ -neliöön yllämainittua tapahtumaa vastaava alue ja laskemalla alueen pinta-alan suhde koko neliön pinta-alaan.

(d) Laske (c)-kohdan todennäköisyys hyödyntämällä U:n ja V:n riippumattomuutta.

(e) Laske todennäköisyys, että Ulla saapuu enintään 5 min Venlan saapumisen jälkeen.

(**Vihje:** Kannattaa käyttää samaa tekniikkaa kuin (c)-kohdassa.)

(f) Ulla suostuu odottamaan tapaamispaikalla rajallisen ajan: jos Venla ei ole saapunut 15 min odottamisen jälkeen, Ulla poistuu paikalta. Venla noudattaa samaa periaatetta. Mikä on todennkäköisyys, että Ulla ja Venla tapaavat toisensa?

Kotitehtävät

2A3 (Satelliitin toiminta.) Maata kiertävässä satelliitissa on anturi, jonka toiminta-aika X (yksikkönä vuosi) noudattaa eksponenttijakaumaa parametrina $\lambda = 1$. Tällöin X:llä on tiheysfunktio

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

(a) Määritä X:n kertymäfunktio.

(b) Laske todennäköisyys, että anturi kestää vähintään viisi vuotta.

(c) Määritä satunnaismuuttujan $Y = (X - 5) \,|\, X > 5$ kertymäfunktio (satunnaismuuttujan $X - 5$ ehdollinen jakauma tapahtuman $X > 5$ suhteen).

(d) Laske todennäköisyys, että anturi kestää vielä vähintään toiset viisi vuotta jos tiedetään, että se on ehjä vielä ensimmäisen viiden vuoden jälkeen.

2A4 (Sumea logiikka.) Sumeassa logiikassa lauseilla on 0-1 totuusarvon sijasta reaaliarvoinen totuusarvo välillä $[0, 1]$. Tutkijat mallintavat erään lauseen totuusarvoa satunnaismuuttujalla X, jolla on tiheysfunktio

$$f(x) = \begin{cases} cx(1 - x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

(a) Etsi vakion c arvo.

(b) Laske X:n kertymäfunktio ja piirrä siitä kuva.

(c) Laske todennäköisyys, että totuusarvo on vähintään 0.75.

(d) Näytä, että tiheysfunktio $f(x)$ saavuttaa maksiminsa pisteessä $x = 1/2$.