



Aalto-yliopisto  
Sähkötekniikan  
korkeakoulu

# Sähkötekniikka ja elektroniikka

## Laskuharjoitus 4

Kimmo Silvonen (X)

3.10.2022

# Laskuharjoitus 4

## Johdanto

Kompleksiluvut aiheuttavat sen, ettei tehoa lasketa jännitteen ja virran tulona. Kompleksinen teho määritellään virran liittoluvun  $I^*$  avulla; liittoluvussa imaginääriosan etumerkki tai kulman etumerkki on vaihdettu:

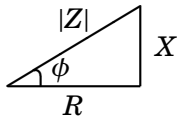
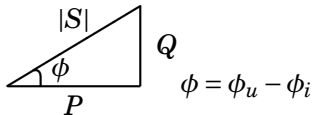
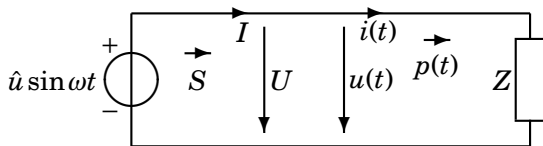
$$S = UI^* = P + jQ \quad (1)$$

Kompleksisen tehon reaaliosa on pätöteho  $P$  ja imaginääriosa loisteho  $Q$ . Vain pätöteholla on selvä fysikaalinen merkitys. Sähköenergian kulutus tarkoittaa pätötehon kulutuksen integraalia. Selvyyden vuoksi tehon eri lajeilla on eri yksiköt: VA, W, VAR.

Disclaimer: käytän termejä näennäisteho ja kompleksinen teho synonyymeinä; yleensä näennäisteholla tarkoitetaan erityisesti kompleksisen tehon itseisarvoa.

# Teho- ja impedanssikolmio, sama $\phi = \phi_u - \phi_i$

## Tehon virtaussuunta



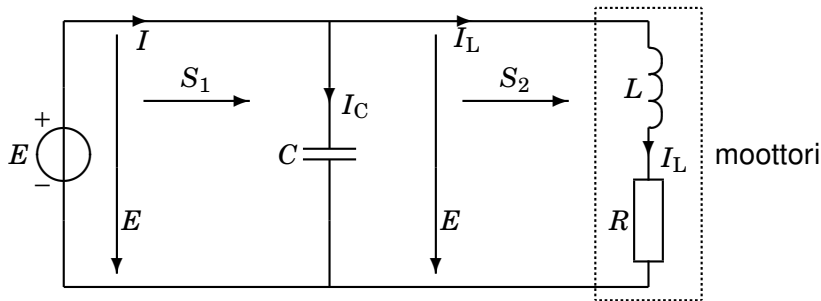
# 41. Laske pätö-, lois- ja näennäistehot

Laske kuorman tehokerroin  $C$ :n kanssa (kuten kuvassa) ja ilman sitä. Vertaa virtoja  $I$  ja  $I_L$  toisiinsa.

$$E = 20 \angle 90^\circ \text{ V}, \omega = 2 \text{ rad/s}, R = 2 \Omega, L = 2 \text{ H}, C = 0,1 \text{ F},$$

$$S_1 = S_{\text{CLR}} = P_1 + jQ_1 \text{ ja } S_2 = S_{\text{LR}} = P_2 + jQ_2.$$

$$I_C = -4 \text{ A}, I_L = 4 + 2j \text{ A}.$$



# Ratkaisu ja lukuarvot

Tehokerroin  $\cos \phi = \frac{P}{|S|}$  eli miten suuri osa  $|U| \cdot |I|$ :stä saadaan hyötytehoksi.

$$I_L = \frac{E}{R + j\omega L} = \frac{20j}{2 + 4j} = \frac{20j(2 - 4j)}{4 + 16} = 4 + 2j \text{ A} \quad (2)$$

$$I_C = \frac{E}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega CE = -4 \text{ A} \quad \Rightarrow I = I_C + I_L = j2 \text{ A} \quad (3)$$

$$S_1 = U_1 I^* = E I^* = 20j(-j2) = 40 \text{ VA} \quad (4)$$

$$S_2 = U_2 I_L^* = E I_L^* = 20j(4 - j2) = 40 + j80 \text{ VA} \quad (5)$$

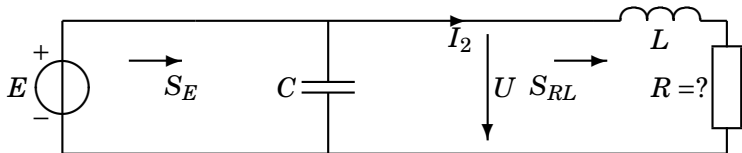
$$P_1 = 40 \text{ W} \quad Q_1 = 0 \text{ VAR} \quad \cos \phi_1 = \frac{P_1}{|S_1|} = 1 \quad (6)$$

$$P_2 = 40 \text{ W} \quad Q_2 = 80 \text{ VAR} \quad \cos \phi_2 = \frac{P_2}{\sqrt{P_2^2 + Q_2^2}} = 0,447_{\text{ind}} \quad (7)$$

## 42. Laske $|I_2|$ ja jännitelähteen kompleksinen teho $S_E$

Aika-akselin nollakohtaan saa valita vapaasti:  $I_2 = |I_2|\angle 0^\circ$

$S_{RL} = 16 + 8j$  VA.  $L = 0,1$  H,  $C = 0,005$  F,  $\omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Huom.  $P_E = P_R$ .



$$S_{RL} = UI_2^* = (R + j\omega L)I_2I_2^* = (R + j\omega L)|I_2|^2 \quad (8)$$

$$\Rightarrow |I_2|^2 = \frac{S_{RL}}{R + j\omega L} = \frac{16 + 8j}{R + j\omega L} \quad (9)$$

Kompleksiluvun itseisarvo on aina reaaliluku  $|I_2|^2 = |I_2|^2\angle 0^\circ$ .

## Nimittäjän ja osoittajan kulmien pitää olla samat

$$\arctan \frac{\omega L}{R} = \arctan \frac{8}{16} \Rightarrow \frac{\omega L}{R} = \frac{8}{16} \Rightarrow R = 2\omega L = 4 \quad (10)$$

$$|I_2|^2 = 4 \Rightarrow |I_2| = 2 \quad (11)$$

Jännitteen tai virran vaihetta ei ole määritelty; valitaan aika-akselin nollakohta siten, että  $I_2$  on nollakulmassa:

$$I_2 = 2 \angle 0^\circ \quad (12)$$

$$E = U = (R + j\omega L)I_2 = (4 + j2)2 = 8 + j4 \quad (13)$$

$$I_C = j\omega CE = j0,1 \cdot (8 + j4) = -0,4 + 0,8j \quad (14)$$

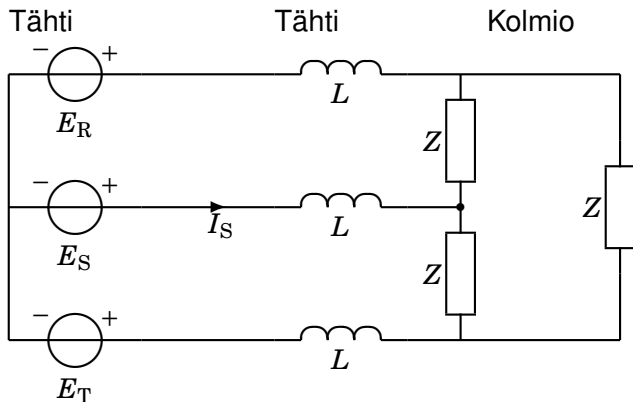
$$I_1 = I_C + I_2 = -0,4 + 0,8j + 2 = 1,6 + 0,8j \quad (15)$$

$$S_E = EI_1^* = (8 + j4)(1,6 - 0,8j) = 16 + j0 \text{ VA} \quad (16)$$

## 43. Vaihevirta $I_S$ 1-vaiheisen sijaiskytkennän avulla

$$E_R = 230 \angle 0^\circ \text{ V}, Z = (15 + j15) \Omega, \omega L = 5 \Omega.$$

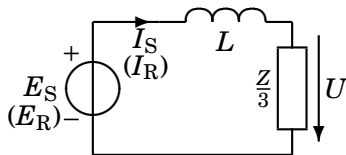
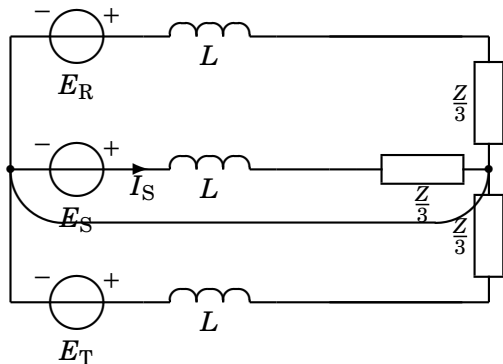
Muista, että kelan impedanssi on aina  $j\omega L$ !





# Tähtikytkentä ja 1-vaiheinen sijaiskytkentä

Tähtipisteet ovat samassa potentiaalissa, joten ne voidaan yhdistää nollajohdolla



# Laskut

## Kolmio-tähti-muunnos

Tähtikytkennässä olevat  $Z_Y$ :t näyttävät ulkoapäin katsottuna samalta kuin kolmiokytkennässä olevat  $Z_\Delta$ :t:

$$Z_Y = \frac{1}{3}Z_\Delta \quad (17)$$

Yksivaiheiseen sijaiskytkentään poimitaan yksi komponentti jokaisesta kolmen ryhmästä. Jännitelähde määrää sen, minkä vaiheen yksivaiheinen sijaiskytkentä näin muodostuu.

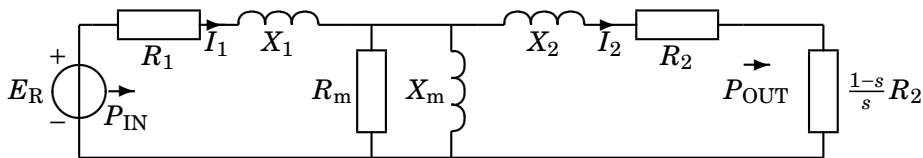
$$E_S = E_R \angle -120^\circ \quad (18)$$

$$I_S = \frac{E_S}{j\omega L + \frac{Z}{3}} = \frac{230 \angle -120^\circ}{5 + j10} = \frac{230 \angle -120^\circ}{11,2 \angle 63,4^\circ} = 20,6 \angle \overbrace{177^\circ}^{-183^\circ} \text{ A}$$
$$\left( I_R = \frac{E_R}{j\omega L + \frac{Z}{3}} = \frac{230 \angle 0^\circ}{11,2 \angle 63,4^\circ} = 20,6 \angle 177^\circ + 120^\circ (-360^\circ) \right) \quad (19)$$

## 44. Epätahttimoottorin yhden vaiheen sijaiskytkentä (ei käsitellä 2022).

Laske yhden vaiheen tyhjäkäyntivirta ( $s = 0$ ) ja moottorin hyötysuhde kuormitustilanteessa jättämän arvolla  $s = 0,1$

$E_R = 230 \angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $R_1 = 0,6 \ \Omega$ ,  $R_2 = 0,4 \ \Omega$ ,  $R_m = 400 \ \Omega$ ,  $X_1 = \omega L_1 = 0,8 \ \Omega$ ,  $X_2 = \omega L_2 = 0,5 \ \Omega$ ,  $X_m = \omega L_m = 20 \ \Omega$ . Muista, että kelan impedanssi on aina  $jX$ !  $I_1 = 48,8 \angle -25,1^\circ \text{ A}$  ja  $I_2 = 46,7 \angle -14,1^\circ \text{ A}$ .



Jättämän  $s$  arvo riippuu moottorin mekaanisesta kuormituksesta ja näkyy virtapiirissä kuormavastuksen muutoksena.

## $P_{OUT}$ ja $P_{IN}$ ovat yhden vaiheen tehot

Koko järjestelmän teho on symmetrian takia kolminkertainen

$$P_{OUT} = \operatorname{Re} \left[ \frac{1-s}{s} R_2 I_2 I_2^* \right] \quad (20)$$

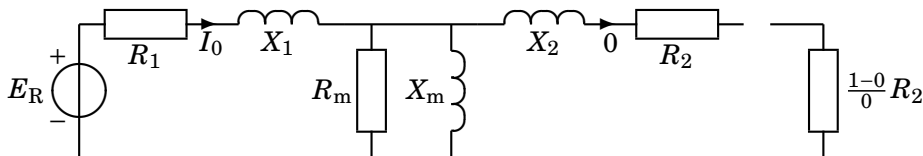
$$P_{IN} = \operatorname{Re}[E_R I_1^*] \quad (21)$$

Hyötysuhde:

$$\eta = \frac{3P_{OUT}}{3P_{IN}} = \frac{3 \frac{1-s}{s} R_2 |I_2|^2}{3 \operatorname{Re}[230 \cdot 48,8 \angle 25,1^\circ]} = \frac{23,55 \text{ kW}}{30,49 \text{ kW}} = 77 \% \quad (22)$$

**Reaaliosa** lasketaan laskimen koordinaatistonmuunnosohjelman tai  $\cos \phi$ :n avulla:  $230 \cdot 48,8 \cdot \cos 25,1^\circ$ .

## Tyhjäkäyntivirta $I_1 = I_0$ (kaikissa vaiheissa sama)



Moottorin akseli pyörii tyhjänä ilman mekaanista kuormaa.

Nyt  $I_2 = 0$ , koska  $s = 0$ :

$$Z_m = \frac{R_m j X_m}{R_m + j X_m} = \frac{j 400}{20 + j} = \frac{j 400 (20 - j)}{401} = \frac{400 + j 8000}{401} \approx 1 + 20j$$

$$I_0 = \frac{E_R}{Z_1 + Z_m} = \frac{230}{0,6 + j 0,8 + 1 + 20j} = \frac{230}{1,6 + j 20,8} = \frac{230}{20,86 \angle 85,6^\circ}$$

$$= 11,0 \angle -85,6^\circ \text{ A} \quad (23)$$